This material is restricted in use and cannot be quoted by title or abstract for propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited.

95748-2
3-1

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 185

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1943

Reproduced and Distributed in the Public Interest by
THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN

Lithoprinted by EDWARDS BROTHERS, INC., ANN ARBOR, MICHIGAN, U.S.A.

MATH
NMI
J8264
v. 185-187

Oct. 13, 1952
B. P.

Archiv-Nr 180343

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis des Bandes 185.

Seite

Braunschmidt, Otto, Über Interpolation 14

Buckel, Walter, Über eine Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix . . 144

Eichler, M., Bemerkungen zu den vorstehenden Vermutungen von Teichmüller 12

Franz, Wolfgang, Abbildungsklassen und Fixpunktklassen dreidimensionaler Linsenräume 65

Hadwiger, H., Über eine Mittelwertformel für Richtungsfunktionale im Vektorraum und einige Anwendungen 241

Haenzel, G. und F. Reutter, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. IV. Über algebraische Regelflächen vom Grade $2n$ mit zwei n-fachen Leitgeraden ($n = 3, 4, 5, 6$) 78

Haupt, Otto, Über Kontinua mit unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen 231

Kowalewski, Gerhard, Neues Beispiel einer genetisch darstellbaren Berührungstransformation 102

Ludwig, Konrad, Die der transversalen Mercatorkarte der Kugel entsprechende Abbildung des Rotationsellipsoids 193

Niedermeier, Franz, Ein elementarer Beitrag zur Fermatschen Vermutung . . 111

Ostmann, Hans-Heinrich, Gegenbeispiel zu einer Frage über Basismengen der additiven Zahlentheorie 63

Pauc, Christian, Über ebene Punktmengen, welche überall einen Sektor von gegebener Größe freilassen 127

Perron, Oskar, Über die Berechnung der Grundeinheit in reellen quadratischen Körpern und Ringen 106

Scholz, Arnold(†), Zur Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. 113

Stöhr, Alfred, Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie II 63

— — Oszillationstheoreme für die Eigenvektoren spezieller Matrizen 129

Teichmüller, Oswald, Drei Vermutungen über algebraische Funktionenkörper . 1

Ernst-Schröder-Preisaufgabe 192

Ausgabedaten der Hefte von Band 185.

Heft 1	ausgegeben am	10. Februar 1943
Heft 2	ausgegeben am	10. Mai 1943
Heft 3	ausgegeben am	5. Oktober 1943
Heft 4	ausgegeben am	28. Oktober 1943

This material is restricted in use and cannot be quoted by title or abstract for propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited.

Drei Vermutungen über algebraische Funktionenkörper.[1]

Von *Oswald Teichmüller*, z. Zt. Norwegen.

Es ist mir jetzt gelungen, neue rein algebraische Folgerungen aus meinen heuristischen Untersuchungen über quasikonforme Abbildungen zu ziehen.

Es handelt sich hauptsächlich (algebraisch ausgedrückt) um folgende Fragestellung: k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, $k(y, z) / k$ vom Transzendenzgrad 2 und $K / k(y, z)$ endlich algebraisch; Y sei der Körper aller i. b. a. $k(y)$ algebraischen Elemente aus K. Es kommt uns nur auf k, Y, K an; y ist beliebig in Y, aber nicht in k, und z ist beliebig in K, aber nicht in Y. Ist Y^* eine endlich-algebraische Erweiterung von Y, so sei K^* die Erweiterung des hyperkomplexen Systems Y^* mit dem Grundkörper Y auf den neuen Grundkörper K, also das Kompositum[2]). Bei gegebenem $k < Y < K$ wird nun gefragt: Gibt es ein Y^* so, daß in dem zugehörigen K^* ein algebraischer Funktionenkörper X vom Transzendenzgrad 1 über k existiert, der mit Y^* zusammen K^* erzeugt?

Zunächst einige Vorbemerkungen, deren Inhalt im Prinzip vielleicht schon bekannt ist. In einem separabel erzeugbaren algebraischen Funktionenkörper (einer Veränderlichen) bilden wir nicht nur gewöhnliche Differentiale wdz, sondern auch *Differentiale m-ter Dimension* wdz^m, insbesondere *quadratische* Differentiale für $m = 2$ und *reziproke* Differentiale für $m = -1$, und ordnen ihnen Divisoren aus $\mathfrak{W}^m$ zu[3]); sie heißen *überall endlich*, wenn der Divisor ganz ist. Für so ein wdz^m schreiben wir kurz $d\xi^m$, obwohl es i. a. keine m-te Potenz ist. — Unter einem *Hauptteil für Differentiale m-ter Dimension an der Stelle* $\mathfrak{p}$ verstehen wir eine additive Restklasse von Differentialen m-ter Dimension mod den in $\mathfrak{p}$ endlichen Differentialen m-ter Dimension. Wir sprechen von einem *Hauptteilsystem*, wenn an jeder Stelle $\mathfrak{p}$ ein Hauptteil gegeben ist, aber nur endlich viele $\neq 0$. So bilden die Hauptteile eines Differentials m-ter Dimension $d\xi^m$ das *Hauptteilsystem von* $d\xi^m$.

Nun seien $d\zeta_1^{1-m}, \ldots, d\zeta_\tau^{1-m}$ ($\tau = \dim \mathfrak{W}^{1-m}$) eine Basis der überall endlichen Differentiale $(1-m)$-ter Dimension. Dann ist

$$\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}} (d\xi^m \cdot d\zeta_t^{1-m}) = 0 \qquad (t = 1, \ldots, \tau).$$

Hier ist über alle Stellen $\mathfrak{p}$ zu summieren; wenn $\mathfrak{p}$ vom Grade 1 ist[4]), ist das Residuum der

[1]) Aus einem Brief an Hasse vom 11. 8. 1940. Später durch Fußnoten und zwei Anhänge ergänzt.

[2]) K^* ist ein *Körper* (und *darum* das bis auf Isomorphie *einzige Kompositum* von Y^* und K i. b. a. Y), weil Y *in* K *algebraisch abgeschlossen* ist. Beweis etwa durch Übergang zu einem i. b. a. Y Galoisschen Oberkörper von Y^*.

[3]) $\mathfrak{W}$ ist die Differentialklasse.

[4]) Das kann man für die endlich vielen kritischen $\mathfrak{p}$ von vornherein annehmen oder durch Grundkörpererweiterung erreichen.

Reproduced and Distributed in the Public Interest by THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN

Koeffizient von $\frac{d\pi}{\pi}$ bei Entwicklung nach einem Primelement π. Dieses Residuum hängt nur vom *Hauptteil* von $d\xi^m$ an der Stelle $\mathfrak{p}$ ab. Unsere $\tau = \dim \mathfrak{W}^{1-m}$ Gleichungen sind also τ *lineare Relationen, die für das Hauptteilsystem jedes* $d\xi^m$ *gelten*. Es gilt nun folgender

Hilfssatz[5]). *Diese* τ *Relationen sind linear unabhängig, und ein Hauptteilsystem ist dann und nur dann das Hauptteilsystem eines Differentials m-ter Dimension, wenn dafür diese* τ *Relationen bestehen.*

Diese Aussage wollen wir formal umformen. Ein *Isomorphismus* zwischen zwei endlichen Moduln (Linearmannigfaltigkeiten) über einem Körper P ist einfach eine eineindeutige lineare Abbildung; dabei ist der *Rang* invariant. Wir wollen von einer *Dualität* zwischen zwei endlichen Moduln sprechen, wenn der eine isomorph auf den Modul aller Linearformen im anderen Modul abgebildet ist. Diese Beziehung ist symmetrisch. Man hat dann ein „Produkt" eines Elements des einen Moduls mit einem des anderen, nämlich den Wert der dem ersten zugeordneten Linearform für das andere Element; dieses Produkt ist eine nicht ausgeartete Bilinearform, die die Dualität definiert. Duale endliche Moduln haben den gleichen Rang[6]).

Jetzt können wir unseren Hilfssatz auch so ausdrücken: Wir fassen die Hauptteilsysteme in Klassen zusammen, nämlich additive Restklassen mod den Hauptteilsystemen von existierenden Differentialen m-ter Dimension. Es besteht eine Dualität zwischen dem Modul dieser *Hauptteilsystemklassen* und dem Modul der überall endlichen Differentiale $(1-m)$-ter Dimension. Die nicht ausgeartete Bilinearform ist dabei

$$\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}} (\text{Hauptteil} \cdot d\zeta^{1-m})\ ^{7}).$$

Insbesondere sind die

$$x_t = \sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}} (\text{Hauptteil} \cdot d\zeta_t^{1-m}) \qquad (t = 1, \ldots, \tau)$$

ein Koordinatensystem im Modul aller Hauptteilsystemklassen[8]), und dieser Modul hat i. b. a. den Konstantenkörper den Rang $\tau = \dim \mathfrak{W}^{1-m}$.

---

[5]) Beweis in verallgemeinerter Form s. Anhang I.

[6]) Gleichbedeutend ist offenbar folgende Erklärung der Dualität: M sei ein endlicher Modul vom Rang m mit der Basis $u_1, \ldots, u_m$ und dem allgemeinen Elemente $x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i u_i$ (ξ_i in P), N ein endlicher Modul vom Rang n mit der Basis $v_1, \ldots, v_n$ und dem allgemeinen Element $y = \sum_{k=1}^{n} v_k \eta_k$ (η_k in P). Es soll eine Bilinearform $C(x, y)$ gegeben sein, die jedem Paar x aus M, y aus N ein Element $C(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \xi_i \gamma_{ik} \eta_k$ in P bilinear zuordnet. Bei Übergang zu neuen Basen $u_1', \ldots, u_m'$ oder $v_n', \ldots, v_n'$ hat man natürlich die γ_{ik} so zu transformieren, daß $C(x, y)$ invariant ist. Diese Bilinearform soll nichtausgeartet sein, d. h. ein x, für das $C(x, y)$ für alle y gleich 0 ist, ist 0, und ein y, für das $C(x, y)$ für alle x gleich 0 ist, ist 0. Die Bedingung ist offenbar $m = n$, $|\gamma_{ik}| \neq 0$. Dann sprechen wir von einer durch die Bilinearform C definierten Dualität zwischen M und N. Für jedes x in M ist $C(x, y)$ eine *Linearform* in N, d. h. eine Funktion, die den Elementen von N linear Werte aus P zuordnet, und diese Abbildung, die jedem Element von M eine Linearform in N zuordnet, ist linear und eineindeutig; so kommt man auf die im Text gegebene Definition zurück. S. auch Anm. [15]).

[7]) Wenn N ein endlicher und M ein beliebiger P-Modul ist, sonst sich aber alles wie in Anm. [6]) verhält, dann ist von selbst auch M ein endlicher Modul mit demselben Rang wie N. (Beweis: Jeder endliche Teilmodul von M ist dual zu einem gewissen Restklassenmodul von N.) In unserem Falle ist M der Modul aller Hauptteilsystemklassen und N der Modul aller überall endlichen $d\zeta^{1-m}$; P ist der Konstantenkörper unseres Funktionenkörpers. Zunächst ist klar, daß $C(x, y)$ nur von der Hauptteilsystemklasse x abhängt. Daß die τ Relationen linear unabhängig sind, besagt: aus $C(x, y) = 0$ für alle x folgt $y = 0$; die zweite Behauptung des Hilfssatzes besagt, daß aus $C(x, y) = 0$ für alle y folgt $x = 0$.

[8]) Sind $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von N, so sind $C(x, v_1), \ldots, C(x, v_n)$ n linear unabhängige Linearformen in M, also ein Koordinatensystem. Man kann eine neue Basis $u_1, \ldots, u_n$ von M durch $C(u_i', v_k) = \left\{\begin{matrix} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{matrix}\right\}$ bestimmen; dann ist $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' u_i'$ mit $\xi_i' = C(x, v_i)$.

Nun sei wie zu Anfang k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, Y ein algebraischer Funktionenkörper über k und K ein algebraischer Funktionenkörper mit dem genauen Konstantenkörper Y, und es seien y in Y, aber nicht in k, und z in K, aber nicht in Y beliebig gewählt. An jeder Primstelle $\mathfrak{P}$ von K/Y nehme ich eine *verallgemeinerte Ortsuniformisierende* z' — darunter verstehen wir eine Funktion aus K, die ihren endlichen Wert in $\mathfrak{P}$ einfach annimmt, so daß jede in $\mathfrak{P}$ ganze Funktion in eine Potenzreihe nach $z' - a$ entwickelbar ist, wo a in einem algebraischen Oberkörper von Y liegt — und ein irreduzibles Polynom F mit Koeffizienten aus Y mit $F(z, z') = 0$; wenn z für $\mathfrak{P}$ unendlich ist, soll z durch $\frac{1}{z}$ ersetzt werden[9]). Dann bilde ich das reziproke Differential

$$-\frac{F_y}{F_z}\,dz^{-1}$$

und nehme seinen Hauptteil an der Stelle $\mathfrak{P}$. Man sieht leicht, daß dieser Hauptteil von der Wahl von z' (und F) unabhängig ist und invariant ist, wenn z einer linearen gebrochenen Transformation mit Koeffizienten aus k unterworfen wird. F_y ist selbstverständlich durch Differentiation der einzelnen Koeffizienten von F zu berechnen. Der Hauptteil hängt also bei gegebenem $k < Y < K$ nur von y und z ab; er ist höchstens an den endlich vielen Verzweigungsstellen von $K/Y(z)$ von 0 verschieden, und die Ordnung des Pols des Hauptteils ist höchstens gleich der Verzweigungsordnung[10]). Wir haben es also mit einem Hauptteilsystem zu tun. Ersetzen wir y durch ein y' (in Y, aber nicht in k), so multipliziert sich das Hauptteilsystem nur mit $\frac{dy}{dy'}$.

Auf Grund funktionentheoretisch-differentialgeometrischer Überlegungen von heuristischer Art stelle ich nun folgende **Vermutungen** auf:

1. *Die Klasse des eben definierten Hauptteilsystems ist auch von z unabhängig, hängt also nur von k, K und y ab.*

2. *Dann und nur dann gibt es eine endlich-algebraische Erweiterung Y^* von Y und in der entsprechenden Erweiterung K^* von K einen algebraischen Funktionenkörper X vom Transzendenzgrad 1 über k, der mit Y^* zusammen K^* erzeugt, wenn diese Hauptteilsystemklasse $= 0$ ist.*

Diese beiden Vermutungen möchte ich noch etwas näher erklären und in einen größeren Zusammenhang stellen. Jetzt ist k der Körper der komplexen Zahlen.

Das y, das bisher eine *Unbestimmte* war, soll jetzt eine *veränderliche Zahl* sein[11]). An die Stelle des Funktionenkörpers K vom Transzendenzgrad 2 tritt jetzt[12]) ein algebra-

---

[9]) Dieser Satz ist nach einem Vorschlag von Eichler gegenüber dem Text des Briefes abgeändert. Der Inhalt der Arbeit wird dadurch nicht berührt.

[10]) All dies kann man aus folgender Darstellung sehen: Hat $\mathfrak{P}$ den Grad 1 und hat z bei $\mathfrak{P}$ die Entwicklung

$$z = p + c_\nu(z' - a)^\nu + c_{\nu+1}(z' - a)^{\nu+1} + \cdots \quad (\nu \geqq 1),$$

so hat $-\frac{F_y}{F_z}\,dz^{-1}$ denselben Hauptteil wie

$$p_y \frac{dz'}{dz}\,dz'^{-1}.$$

Das folgt aus $F(x, z') = (x - p - c_\nu(x' - a)^\nu - \cdots)\,H(x)$, wo das Polynom $H(x)$ Koeffizienten aus dem $\mathfrak{P}$-adischen Körper $K_{\mathfrak{P}}$ hat. Wieder darf man sich auf den Fall grad $\mathfrak{P} = 1$ beschränken. Vgl. auch Anhang II.

[11]) y war als i. b. a. k transzendentes Element des Oberkörpers Y von k als *Unbestimmte über k* anzusehen. Jetzt aber soll y eine *komplexe Zahl in k* sein, die wir variieren lassen. Der Übergang zwischen beiden Auffassungen durch „Spezialisierung" des y bietet bei exakter Durchführung manche Schwierigkeiten.

[12]) Wenn man y spezialisiert, s. Anm. [11]).

ischer Funktionenkörper $Z_y = k(z, w)$, der algebraisch (oder doch analytisch) von einem Parameter y abhängt und dafür nur noch den Transzendenzgrad 1 über k hat. z mag weiterhin als Unbestimmte angesehen werden. Die Koeffizienten der z mit einer „verallgemeinerten Ortsuniformisierenden" z' verbindenden irreduziblen Gleichung $F(z, z') = 0$ sind also Funktionen von y. Wieder wird durch

$$-\frac{F_y}{F_z}\,dz^{-1}$$

ein Hauptteilsystem für reziproke Differentiale bestimmt, das nur aus dem obigen durch Spezialisierung des y entsteht und Pole höchstens an den Verzweigungspunkten von $Z_y/k(z)$ hat.

Wir fassen nun die *Klassen birational äquivalenter irreduzibler Gleichungen* $f(z, w) = 0$ oder die *Klassen isomorpher Funktionenkörper* oder die *Klassen konform äquivalenter Riemannscher Flächen* eines festen Geschlechts g zu einer algebraischen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}$, in der ein Punktbegriff gegeben ist, oder zu einem *Raum* $\mathfrak{R}$ zusammen. P sei ein regulärer Punkt von $\mathfrak{R}$. Ein *kontravarianter Vektor in* P ist eine Vorschrift, die jedem in P regulären Koordinatensystem $u^1, \ldots, u^\tau$ Komponenten (Zahlen) $v^1, \ldots, v^\tau$ so zuordnet, daß, wenn sie auch dem Koordinatensystem $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^\tau$ Komponenten $\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^\tau$ zuordnet,

$$\bar{v}^i = \sum_{k=1}^{\tau} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k} v^k$$

gilt. Ein *kovarianter Vektor in* P hat entsprechend Komponenten $\lambda_1, \ldots, \lambda_\tau$ mit

$$\bar{\lambda}_i = \sum_{k=1}^{\tau} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i} \lambda_k.$$

Die kontravarianten und die kovarianten Vektoren in P bilden je einen τ-dimensionalen Modul über k, wo τ die Dimension von $\mathfrak{R}$ ist[13]), und es besteht zwischen ihnen eine Dualität, beschrieben durch die nicht ausgeartete Bilinearform $\sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i v^i$. Jeder analytischen oder gar algebraischen Parameterkurve $P(y)$ in $\mathfrak{R}$ ist in jedem regulären Punkt $P(y)$ ein kontravarianter „*Geschwindigkeitsvektor*" zugeordnet: hat $P(y)$ die Koordinaten $u^1(y), \ldots, u^\tau(y)$, so hat dieser Vektor die Komponenten $\frac{du^1}{dy}, \ldots, \frac{du^\tau}{dy}$.

Nun habe ich in Nr. 88 der Abhandlung „Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale"[14]) im Vorübergehen, ohne es damals gebührend zu betonen, eine *Dualität zwischen dem Modul der überall endlichen quadratischen Differentiale* $d\zeta^2$ *eines algebraischen Funktionenkörpers* Z *und dem Modul der infinitesimalen Verrückungen des diesen Körper* Z *in* $\mathfrak{R}$ *vertretenden Punktes* P heuristisch aufgestellt. (Die Bilinearform heißt dort $\iint \overline{B} \frac{d\zeta^2}{dz^2} \overline{dz}$, wo $\overline{B} \frac{\overline{dz}}{dz^2}$ die infinitesimale Verrückung beschreibt.) Die infinitesimalen Verrückungen werden aber durch kontravariante Vektoren beschrieben. Darum ist der Modul der kontravarianten Vektoren dual zum Modul der überall endlichen quadratischen Differentiale[13]). Dieser ist aber nach dem Hilfssatz ($m = -1$)

---

[13]) Bekanntlich ist die Dimension von $\mathfrak{R}$ stets gleich dim $\mathfrak{B}^2$, denn beide sind gleich

$$\begin{Bmatrix} 0, & g = 0 \\ 1, & g = 1 \\ 3(g-1), & g > 1 \end{Bmatrix}.$$

Meines Wissens ist früher kein Versuch gemacht worden, diese Übereinstimmung zu erklären.

[14]) Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1939.

dual zum Modul der Hauptteilsystemklassen für reziproke Differentiale. Folglich[15]) haben wir einen *Isomorphismus des Moduls der kontravarianten Vektoren mit dem Modul der Hauptteilsystemklassen für reziproke Differentiale.*

Wie sieht nun dieser Isomorphismus praktisch aus? Wenn eine Kurve $P(y)$ in $\mathfrak{R}$ durch einen vom Parameter y abhängigen Funktionenkörper Z_y wie oben festgelegt wird, ist ihr ja in jedem regulären Punkt ein kontravarianter Geschwindigkeitsvektor zugeordnet; welche Hauptteilsystemklasse entspricht ihm? Das habe ich ausgerechnet[16]); das Ergebnis ist[17]) (bis auf einen Faktor -2π) gerade das oben durch $-\frac{F_y}{F_z}dz^{-1}$ bestimmte Hauptteilsystem. Allerdings mußte ich voraussetzen, es träten nur einfache Verzweigungspunkte auf; aber diese Voraussetzung dürfte aus Stetigkeitsgründen entbehrlich sein. Eigentlich sollte man die singulären Punkte von $\mathfrak{R}$ ausnehmen, aber vermutlich ist das nicht nötig; die „topologische Festlegung", die ich nicht algebraisch fassen kann, beseitigt alle Singularitäten.

(Ebenso besteht ein Isomorphismus zwischen dem Modul der kovarianten Vektoren und dem Modul der überall endlichen quadratischen Differentiale. Man kann also jeder analytischen Invariante eines Funktionenkörpers das überall endliche quadratische Differential zuordnen, das ihrem Gradienten entspricht.)

Die Hauptteilsystemklasse, die dem Geschwindigkeitsvektor von $P(y)$ entspricht, darf von der Wahl von z nicht abhängen; das entspricht unserer ersten Vermutung. Wenn ferner diese Hauptteilsystemklasse für alle y verschwindet, muß $P(y)$ konstant sein; in allen Körpern Z_y muß sich dann durch birationale Transformationen ein und derselbe (in $\mathfrak{R}$ durch das konstante $P(y)$ vertretene) algebraische Funktionenkörper $X = k(x, u)$ realisieren lassen. Wenn Z_y algebraisch von y abhängt, wird vermutlich auch diese birationale Transformation in y algebraisch gewählt werden können (Zusammenhang mit *W. Weber*, Über die Einheitlichkeit von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal[18])); das habe ich durch die zweite Vermutung zu präzisieren versucht. Wir müssen nur im Auge behalten, daß y in der Formulierung als Unbestimmte, in der Begründung aber als Veränderliche auftritt.

Die Verallgemeinerung auf mehrere Veränderliche $y_1, \ldots, y_n$ drängt sich auf. Wir formulieren sofort die weitere **Vermutung:**

k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, $k(y_1, \ldots, y_n)$ der rationale Funktionenkörper in n Unbestimmten, $Y/k(y_1, \ldots, y_n)$ endlich algebraisch und K ein algebraischer Funktionenkörper (vom Transzendenzgrad 1) über dem genauen Konstantenkörper Y; z liege in K, aber nicht in Y. Wir bilden in K ähnlich wie vorhin die n durch

$$-\frac{F_{y_\nu}}{F_z}dz^{-1} \quad (\nu = 1, \ldots, n)$$

bestimmten Hauptteilsysteme; r sei der Rang des von den n zugehörigen Hauptteilsystemklassen erzeugten Moduls über Y. Dann gibt es eine endlich algebraische Erweiterung Y^*

---

[15]) Mit jedem Modul M ist zugleich der Modul M' aller Linearformen in M gegeben, der Prototyp eines zu M dualen Moduls, und die Beziehung zwischen M und M' ist symmetrisch. Eine Dualität zwischen M und N kann als Doppelisomorphie $M \cong N'$, $M' \cong N$ angesehen werden, wo jede dieser beiden Isomorphien die andere festlegt. Bei dieser Auffassung ist es klar, daß beim Zusammensetzen einer Dualität von L und M mit einer Dualität von M und N eine Isomorphie $L \cong N$ (und $L' \cong N'$) entsteht.

[16]) Die Rechnung, die auf der Theorie der infinitesimalen quasikonformen Abbildungen aufbaut, wird in Anhang II durchgeführt.

[17]) Nachdem ein bestimmtes z zugrunde gelegt worden ist.

[18]) Deutsche Mathematik 1.

von Y und in der zugehörigen Erweiterung K^* von K einen Teilkörper X vom Transzendenzgrad $r+1$ über k, der mit Y^* zusammen K^* erzeugt.

Es ist zu beachten, daß hier stets

$$r \leqq \dim \mathfrak{W}^2 = \begin{cases} 0, & g=0 \\ 1, & g=1 \\ 3(g-1), & g>1 \end{cases}$$

ist, wo g das Geschlecht von K/Y ist.

Anhang I.

Wir beweisen eine Verallgemeinerung des zu Anfang formulierten Hilfssatzes. m sei eine ganze rationale Zahl, $\mathfrak{a}$ sei ein Divisor unseres Funktionenkörpers und $\mathfrak{A}$ seine Divisorenklasse. Unter einem *Hauptteil bezüglich* $\mathfrak{a}$ *an der Stelle* $\mathfrak{p}$ verstehen wir eine additive Restklasse von Differentialen m-ter Dimension mod den, durch $\mathfrak{a}$ dividiert, in $\mathfrak{p}$ endlichen Differentialen m-ter Dimension; entsprechend *Hauptteilsystem bezüglich* $\mathfrak{a}$. Die additiven Restklassen von Hauptteilsystemen bezüglich $\mathfrak{a}$ mod den Hauptteilsystemen bezüglich $\mathfrak{a}$ von existierenden Differentialen m-ter Dimension heißen *Hauptteilsystemklassen bezüglich* $\mathfrak{a}$. Hier hat man eine Basis

$$d\zeta_1^{1-m}, \ldots, d\zeta_\tau^{1-m} \quad (\tau = \dim \mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m})$$

der, mit $\mathfrak{a}$ multipliziert, überall endlichen Differentiale $(1-m)$-ter Dimension, und

$$\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}} (d\xi^m \cdot d\zeta_t^{1-m}) = 0 \qquad (t = 1, \ldots, \tau)$$

sind τ lineare Relationen für das Hauptteilsystem jedes $d\xi^m$ bezüglich $\mathfrak{a}$. *Wir behaupten wieder, daß diese τ Relationen linear unabhängig sind und daß es zu einem gegebenen Hauptteilsystem dann und nur dann ein Differential m-ter Dimension $d\xi^m$ gibt, wenn diese τ Relationen erfüllt sind*[19]). Oben wurde nur der Sonderfall $\mathfrak{a} = 1$ gebraucht.

Zum *Beweis* nehmen wir einen ganzen Divisor $\mathfrak{d}$ der Klasse $\mathfrak{D}$, den wir hinreichend groß wählen werden. Vorgelegt sei ein Hauptteilsystem, für das jene τ Relationen erfüllt sind; ich wähle $\mathfrak{d}$ so groß, daß die Hauptteile, mit $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}}$ multipliziert, ganz werden, und betrachte alle Hauptteilsysteme mit der letzteren Eigenschaft zugleich. Nach dem *Riemann-Rochschen Satz* ist

$$\dim \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m = \dim \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}} \mathfrak{W}^{1-m} + \operatorname{grad} \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m - g + 1$$

$$\dim \frac{1}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m = \dim \mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m} + \operatorname{grad} \frac{1}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m - g + 1$$

$$\dim \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m - \dim \frac{1}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m = \operatorname{grad} \mathfrak{D} - \dim \mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m},$$

wenn $\mathfrak{d}$ so groß gewählt ist, daß $\dim \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}} \mathfrak{W}^{1-m} = 0$ ist. $\operatorname{grad} \mathfrak{D}$ ist nun der Rang der Linearmannigfaltigkeit aller Hauptteilsysteme bezüglich $\mathfrak{a}$, die mit $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}}$ multipliziert ganz werden;

[19]) Demnach definiert auch hier die Bilinearform

$$\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}} (\text{Hauptteil} \cdot d\zeta^{1-m})$$

eine Dualität zwischen den Hauptteilsystemen für Differentiale m-ter Dimension bezüglich $\mathfrak{a}$ und den, mit $\mathfrak{a}$ multipliziert, überall endlichen Differentialen $(1-m)$-ter Dimension $d\zeta^{1-m}$.

$\dim \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m - \dim \frac{1}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m$ ist der Rang derjenigen linearen Teilmannigfaltigkeit, wo es ein Differential m-ter Dimension gibt[20]), und wir kennen schon $\tau = \dim \mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m}$ lineare Relationen, die in der letzteren Teilmannigfaltigkeit gelten. Wir sind fertig, wenn wir zeigen, daß diese Relationen in der großen Linearmannigfaltigkeit linear unabhängig sind[21]). Dann liegt nämlich erstens jedes Element der großen Linearmannigfaltigkeit (Hauptteilsystem für Differentale m-ter Dimension bezüglich $\mathfrak{a}$, das mit $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ multipliziert ganz wird), sowie dafür jene τ Relationen erfüllt sind, schon in der Teilmannigfaltigkeit derer, die Hauptteilsystem bezüglich $\mathfrak{a}$ eines Differentials m-ter Dimension sind; insbesondere gilt dies dann für das vorgelegte Hauptteilsystem, von dem wir ausgegangen sind; zweitens sind dann jene τ Relationen linear unabhängig, weil sie schon bei Beschränkung auf unsere große Linearmannigfaltigkeit vom Rang grad $\mathfrak{D}$ linear unabhängig sind.

Wir wählen $\mathfrak{b}$ so groß, daß $k >$ grad $\mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m}$ Primstellen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ darin aufgehen, die in $\mathfrak{a}$ nicht vorkommen. Wären die τ Relationen linear abhängig, dann gäbe es ein $d\zeta^{1-m} = \sum_{i=1}^{\tau} \alpha_i \, d\zeta_i^{1-m} \neq 0$, für das $\sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{Res}_{\mathfrak{p}} (\text{Hauptteil} \cdot d\zeta^{1-m}) = 0$ für jedes, mit $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ multipliziert, ganze Hauptteilsystem wäre. Nimmt man hier ein Hauptteilsystem $\mathfrak{p}$, das bei $\mathfrak{p}_k$ in beliebiger Weise einen Pol erster Ordnung hat und sonst überall verschwindet, so folgt, daß $d\zeta^{1-m}$ an der Stelle $\mathfrak{p}_k$ verschwindet. Ein, mit $\mathfrak{a}$ multipliziert, überall endliches Differential $(1-m)$-ter Dimension $d\zeta^{1-m}$ kann aber höchstens grad $\mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m}$ Nullstellen haben; Widerspruch.

Folglich sind die τ Linearformen linear unabhängig, und die Behauptung ist bewiesen.

Der soeben bewiesene Hilfssatz kann als erklärender Zusatz zum Riemann-Rochschen Satz aufgefaßt werden[22]).

Anhang II.

Wir nehmen einen algebraischen Funktionenkörper Z_y an, der analytisch oder sogar algebraisch von einem Parameter y abhängt, und fassen ihn als Oberkörper von $k(z)$ und seine Riemannsche Fläche $\mathfrak{Z}_y$ als Überlagerungsfläche der z-Ebene auf. Wir nehmen an, es treten *nur einfache* (zweiblättrige) Windungspunkte $\mathfrak{p}_\nu$ über $z = p_\nu$ auf; durch eine lineare gebrochene Transformation von z mit von y unabhängigen Koeffizienten können wir erreichen, daß alle p_ν für einen gewissen y-Bereich endlich sind.

[20]) Denn $\dim \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m$ ist der Rang des Moduls aller in Frage kommenden $d\xi^m$, und $\dim \frac{1}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}$ ist der Rang des Teilmoduls derjenigen $d\xi^m$, die bezüglich $\mathfrak{a}$ das Hauptteilsystem 0 haben.

[21]) In einem endlichen Modul M vom Rang d über dem Grundkörper P mögen τ linear unabhängige Linearformen gegeben sein. Die Teilmannigfaltigkeit N aller Elemente von M, wofür alle diese Linearformen 0 sind, hat dann den Rang $d - \tau$. Wenn also ein Teilmodul N' von M bekannt ist, in dem alle diese Linearformen 0 sind und der den Rang $d - \tau$ hat, dann ist $N' = N$, d. h. jedes Element von M, wo alle τ Linearformen verschwinden, liegt in N'. In unserem Falle ist M der Modul aller Hauptteilsysteme für Differentiale m-ter Dimension bezüglich $\mathfrak{a}$, die mit $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ multipliziert ganz werden, N' der Teilmodul derer, die Hauptteilsystem bezüglich $\mathfrak{a}$ eines existierenden Differentials m-ter Dimension sind, P der Konstantenkörper, $d =$ grad $\mathfrak{D}$ und $\tau = \dim \mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m}$; N' hat den Rang

$$\dim \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m - \dim \frac{1}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m = d - \tau.$$

[22]) Vgl. hierzu O. Teichmüller, Extremalprobleme der konformen Geometrie; Eine Begründung der algebraischen Funktionentheorie durch Uniformisierung.

Sie sind dann analytische Funktionen $p_\nu(y)$ von y und legen $\mathfrak{Z}_y$ und damit Z_y fest, sowie nur ein einziges $\mathfrak{Z}_{y_0}$ bekannt ist.

Nun muß erst kurz wiederholt werden, wie die Dualität zwischen den infinitesimalen Abänderungen eines algebraischen Funktionenkörpers und seinen quadratischen Differentialen zustande kommt. Z_y hängt ja von y ab; ich bilde die Riemannsche Fläche $\mathfrak{Z}_y$ von Z_y durch eine Abbildung, die (nach Übergang zu den Ortsuniformisierenden) hinreichend regulär ist und die nur unendlich wenig von der Identität verschieden ist, auf die unendlich benachbarte Fläche $\mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ ab, wo δy eine von erster Ordnung unendlich kleine *reelle* Zahl ist. Ist π eine verallgemeinerte Ortsuniformisierende an einer Stelle von $\mathfrak{Z}_y$ und π' eine an der entsprechenden Stelle von $\mathfrak{Z}_{y+\delta y}$, so ist vermöge unserer Abbildung

$$|\,d\pi'\,|^2 = \lambda\{|\,d\pi\,|^2 + \delta y \cdot \Re(Bd\pi^2)\},$$

wo λ ein von π abhängiger reeller Faktor ist, in den noch δy eingeht und der in erster Näherung gleich 1 ist, und wo B eine komplexwertige Funktion von π ist. Wenn man von π und π' zu neuen Ortsuniformisierenden übergeht, ist $B\frac{d\pi^2}{|\,d\pi\,|^2}$ und damit auch

$$\overline{B}\frac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$$

($\overline{|d\pi|}$ Flächenelement in der π-Ebene) invariant, und *durch dieses auf* $\mathfrak{Z}_y$ *gegebene* $\overline{B}\frac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$ *beschreibe ich die infinitesimale Abänderung* $\mathfrak{Z}_y \to \mathfrak{Z}_{y+\delta y}$. Aber man konnte $\mathfrak{Z}_y$ auf verschiedene Arten auf $\mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ abbilden, deshalb muß man immer diejenigen (durch ihr $\overline{B}\frac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$ beschriebenen) Abbildungen zu einer *Klasse* zusammenfassen, die $\mathfrak{Z}_y$ auf *dieselbe oder eine konform äquivalente Nachbarfläche* $\mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ abbilden oder die Z_y in *denselben oder einen isomorphen* Körper $Z_{y+\delta y}$ überführen. *Es hat sich gezeigt, daß diese Klassen von* $\overline{B}\frac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$ *genau die additiven Restklassen mod denjenigen* $\overline{B}\frac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$ *sind, für die*

$$\int\int \overline{B}\frac{d\zeta^2}{d\pi^2}\overline{|d\pi|} = 0$$

für alle überall endlichen quadratischen Differentiale $d\zeta^2$ *von* Z_y *ist, daß diese additiven Restklassen eineindeutig und linear den früher eingeführten kontravarianten Vektoren in dem* Z_y *entsprechenden Punkte* P_y *von* $\mathfrak{R}$ *entsprechen, und daß die Bilinearform*

$$\int\int \overline{B}\frac{d\zeta^2}{d\pi^2}\overline{|d\pi|}$$

eine Dualität zwischen diesen kontravarianten Vektoren oder Klassen von $\overline{B}\frac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$ *einerseits und den überall endlichen quadratischen Differentialen* $d\zeta^2$ *andererseits festlegt.*

Wir nehmen jetzt also irgendeine Abbildung $\mathfrak{Z}_y \to \mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ wie oben, berechnen ihr $\overline{B}\frac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$, das noch einige Willkür enthält, und dann die Linearform $l(d\zeta^2) = \int\int \overline{B}\frac{d\zeta^2}{d\pi^2}\overline{|d\pi|}$; diese Linearform (die jedem $d\zeta^2$ linear eine komplexe Zahl zuordnet) muß von aller Willkür wieder frei sein und kann zur Beschreibung des Geschwindigkeitsvektors der Parameterkurve $P(y)$ in $\mathfrak{R}$ dienen. Selbstverständlich sind singuläre Werte von y auszunehmen; über singuläre Punkte von $\mathfrak{R}$ siehe oben.

$\mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ entsteht aus $\mathfrak{Z}_y$, indem der Windungspunkt $\mathfrak{p}_\nu$ von der Stelle $z = p_\nu$ nach $z = p_\nu(y+\delta y) = p_\nu(y) + \delta y \cdot p_\nu'(y)$ geschoben wird. Die positive Zahl R sei so klein, daß die zweiblättrigen Kreise $\mathfrak{K}_\nu$ um die Windungspunkte $\mathfrak{p}_\nu$ mit dem Halbmesser

R alle punktfremd sind. Es sei $0 < r < R$; die zweiblättrigen Kreise um die $\mathfrak{p}_\nu$ mit dem Halbmesser r sollen $\mathfrak{U}_\nu$ heißen, die zweiblättrigen Kreisringe $r < |z - p_\nu| < R$ um die $\mathfrak{p}_\nu$ aber $\mathfrak{R}_\nu$, so daß $\mathfrak{K}_\nu$ aus $\mathfrak{U}_\nu$ und $\mathfrak{R}_\nu$ zusammengesetzt ist. Auf der Fläche $\mathfrak{Z}_y$ wählen wir eine Funktion w von folgender Art: Außerhalb der $\mathfrak{K}_\nu$ ist $w = 0$. In $\mathfrak{U}_\nu$ ist w konstant gleich $p'_\nu(y)$. In $\mathfrak{R}_\nu$ soll w irgendwie so bestimmt werden, daß w auf $\mathfrak{Z}_y$ hinreichend regulär ist. Die Abbildung

$$z \to z + \delta y \cdot w$$

bildet dann $\mathfrak{Z}_y$ auf $\mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ ab. Für diese infinitesimale Abbildung ist, wenn man $z = x + iy$ als Ortsuniformisierende nimmt,

$$B = \overline{w_x + i w_y}^{23}).$$

(*Beweis.* z geht bei der Abbildung in

$$\pi' = z + \delta y \cdot w$$

über. Es ist

$$d\pi' = dz + \delta y \cdot dw;$$
$$|\, d\pi' \,|^2 = |\, dz \,|^2 + 2\delta y \cdot \Re(dz\, d\overline{w}):$$

Nun ist aber

$$2dw = (w_x - i w_y)dz + (w_x + i w_y)d\bar{z};$$

setzt man das ein und berücksichtigt man, daß δy unendlich klein und darum δy^2 zu vernachlässigen ist, so kann man schreiben

$$|\, d\pi' \,|^2 = (1 + \delta y \cdot \Re(w_x - i w_y))\{|\, dz \,|^2 + \delta y \Re(\overline{(w_x + i w_y)} dz^2)\}.$$

Vergleich mit

$$|\, d\pi' \,|^2 = \lambda \{|\, dz \,|^2 + \Re(B dz^2)\}$$

ergibt

$$B = \overline{w_x + i w_y}.)^{24})$$

B ist nur in den $\mathfrak{R}_\nu$ von 0 verschieden (weil sonst die Abbildung $\mathfrak{Z}_y \to \mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ überall konform ist); darum durften wir z als verallgemeinerte Ortsuniformisierende nehmen.

Jetzt haben wir, um die in unserer Abbildung $\mathfrak{Z}_y \to \mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ steckende Willkür zu beseitigen,

$$l(d\zeta^2) = \int\int \overline{B} \frac{d\zeta^2}{dz^2} \boxed{dz}$$

zu berechnen. Das Integral ist die Summe der Integrale über die einzelnen $\mathfrak{R}_\nu$:

$$l(d\zeta^2) = \sum_\nu \int\int_{\mathfrak{R}_\nu} (w_x + i w_y) \frac{d\zeta^2}{dz^2} \boxed{dz}.$$

Partielle Integration ergibt

$$l(d\zeta^2) = \sum_\nu \frac{1}{i} \int_{\mathfrak{R}_\nu} w \frac{d\zeta^2}{dz^2} dz.$$

---

[23]) Wenn man von y zu $\frac{y}{a}$ übergeht ($a \neq 0$ komplex), multipliziert sich $p'_\nu(y)$ mit a, und ebenso multiplizieren sich w und $\overline{B}\boxed{\frac{dz}{dz^2}}$ mit a. $\delta y \cdot \overline{B}\boxed{\frac{dz}{dz^2}}$ ändert sich also bei der Abänderung $y \to \frac{y}{a}$ überhaupt nicht. Ebenso bleibt es, wenn man $\overline{B}\boxed{\frac{dz}{dz^2}}$ durch den kontravarianten Geschwindigkeitsvektor ersetzt. Deshalb ist es gestattet, auch hier (wie schon immer stillschweigend) *komplexe Koordinaten* in $\mathfrak{R}$ zu benutzen, und zugleich sehen wir, daß es nichts schadet, daß wir uns oben auf reelle δy beschränken mußten.

[24]) Die Rechnung verläuft genau wie in Nr. 64 von O. Teichmüller, Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale, Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1939.

w hat aber auf den beiden Randkurven von $\mathfrak{R}_\nu$ die konstanten Randwerte 0 bzw. $p'_\nu(y)$:

$$l(d\zeta^2) = \sum_\nu i \int_{\mathfrak{R}_\nu} p'_\nu(y) \frac{d\zeta^2}{dz}.$$

Das Vorzeichen hat sich geändert, weil $|z - p_\nu| = r$ als Randkurve von $\mathfrak{R}_\nu$ entgegengesetzt orientiert ist wie als Randkurve von $\mathfrak{R}_\nu$. Es ist also

$$l(d\zeta^2) = -2\pi \sum_\nu p'_\nu(y) \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}_\nu} \frac{d\zeta^2}{dz}.$$

Wir können jetzt in den $\mathfrak{R}_\nu$ immer

$$\pi_\nu = \sqrt{z - p_\nu}$$

als Ortsuniformisierende einführen; dann hat $\frac{d\zeta^2}{d\pi_\nu^2}$ in $\mathfrak{p}_\nu$ einen endlichen Wert $\frac{d\zeta^2}{d\pi_\nu^2}(\mathfrak{p}_\nu)$; es ist

$$\frac{1}{dz} = \frac{1}{2\pi_\nu d\pi_\nu}$$

und darum

$$l(d\zeta^2) = -2\pi \sum_\nu p'_\nu(y) \cdot \frac{1}{2} \frac{d\zeta^2}{d\pi_\nu^2}(\mathfrak{p}_\nu).$$

Aber diese explizite Formel verbirgt mehr, als sie zeigt. Wir bleiben lieber bei

$$l(d\zeta^2) = -2\pi \sum_\nu p'_\nu(y) \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}_\nu} \frac{d\zeta^2}{dz}.$$

Diese Formel lesen wir folgendermaßen: Jedem Verzweigungspunkt $\mathfrak{p}_\nu$ ordnen wir einen *Hauptteil für reziproke Differentiale* mit höchstens einem Pol erster Ordnung zu, nämlich $\frac{p'_\nu(y)}{dz}$ (oder, in der Ortsuniformisierenden $\pi_\nu = \sqrt{z - p_\nu}$ ausgedrückt, $\frac{p'_\nu(y)}{2\pi_\nu d\pi_\nu}$). Den anderen Punkten wird der Hauptteil 0 zugeordnet. Mit diesem Hauptteilsystem ist

$$l(d\zeta^2) = -2\pi \sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}} (\text{Hauptteil} \cdot d\zeta^2).$$

Das ist aber bis auf den Faktor -2π gerade die Linearform in der τ-dimensionalen Linearmannigfaltigkeit aller überall endlichen quadratischen Differentiale $d\zeta^2$, die ganz zu Anfang einem Hauptteilsystem immer zugeordnet wurde; so war ja die Dualität zwischen den Hauptteilsystemklassen und den $d\zeta^2$ erklärt.

Da nun sowohl die Linearmannigfaltigkeit der Hauptteilsystemklassen für reziproke Differentiale wie auch die Linearmannigfaltigkeit der kontravarianten Vektoren in dem entsprechenden Punkte von $\mathfrak{R}$ in bestimmter Weise dual zu der Linearmannigfaltigkeit der $d\zeta^2$ ist, bilden wir die ersten beiden isomorph aufeinander ab: wir ordnen eine Hauptteilsystemklasse und einen kontravarianten Vektor einander zu, wenn ihnen bei der Dualität bis auf den Faktor -2π dieselbe Linearform $l(d\zeta^2)$ in der Linearmannigfaltigkeit aller $d\zeta^2$ entspricht[15]). *In diesem Sinne entspricht dem Geschwindigkeitsvektor von $P(y)$ die durch $\frac{p'_\nu(y)}{dz}$ beschriebene Hauptteilsystemklasse.* Und für diese läßt sich auch die oben an die Spitze gestellte Definition durch $-\frac{F_y}{F_z} dz^{-1}$ geben, die vorzuziehen ist, sowie Verzweigungspunkte zusammenfallen; vgl. Anm.[10]).

z ist nur irgendeine nichtkonstante Funktion aus dem Körper Z_y; der Geschwindigkeitsvektor von $P(y)$ hat mit z nichts zu tun, und darum muß die ihm zugeordnete Hauptteilsystemklasse von der Wahl von z unabhängig sein. Wenn ferner diese Haupt-

teilsystemklasse verschwindet, ist auch der Geschwindigkeitsvektor von $P(y)$ gleich 0 und darum $P(y)$ in $\mathfrak{R}$ konstant. Das ist die heuristische analytische Begründung meiner Vermutungen.

Das Einführen der ziemlich willkürlichen Funktion w in der bestimmten Erwartung, daß sich alle Willkür bei der weiteren Rechnung wieder herausheben wird, ist der eigentliche Kerngedanke der ganzen Arbeit; alles andere ist nur formale Umformung, die aber notwendig ist, um dem Algebraiker das Verstehen meiner Vermutungen zu ermöglichen.

Eingegangen 3. März 1941.

Bemerkungen zu den vorstehenden Vermutungen von Teichmüller.

Von *M. Eichler*, z. Zt. in Darmstadt.

Die erste Teichmüllersche Vermutung läßt sich sehr einfach beweisen. Die nachfolgende kurze Beweisskizze beleuchtet die Teichmüllerschen Begriffsbildungen gleichzeitig von einer anderen Seite, indem sie sie mit der Änderung der Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche von K mit dem Parameter y in Zusammenhang bringt. Wird die in Rede stehende Hauptteilsystemklasse mit $d\eta(z)^{-1}$ bezeichnet, so besagt die erste Vermutung:

$$d\eta(z)^{-1} \sim d\eta(z')^{-1}$$

für irgend zwei Funktionen z und z' aus K. Wir denken uns bei den folgenden Ausführungen den Konstantenkörper Y von K durch seine algebraisch-abgeschlossene Hülle ersetzt, sodaß alle Primdivisoren vom ersten Grade sind.

Es sei $\mathfrak{P}$ eine Primstelle in K, an der z und z' endliche Werte haben mögen. z_1 sei eine Ortsuniformisierende in $\mathfrak{P}$. Dann bestehen Gleichungen

$$G_0 = \alpha_1(z-\alpha)^{\frac{1}{n}} + \alpha_2(z-\alpha)^{\frac{2}{n}} + \cdots - z_1 = 0,$$

$$H_0 = \alpha_1'(z'-\alpha')^{\frac{1}{n'}} + \alpha_2'(z'-\alpha')^{\frac{2}{n'}} + \cdots - z_1 = 0$$

in der $\mathfrak{P}$-adischen Erweiterung $K_{\mathfrak{P}}$ von K. Nun ist

$$F_0 = G_0 - H_0 = 0$$

ein Teiler der irreduziblen zwischen z und z' in Y bestehenden Gleichung $F = 0$:

$$F = F_0 F_1;$$

ebenso gilt

$$G = G_0 G_1, \quad H = H_0 H_1,$$

wo G und H die irreduziblen zwischen z und z_1 bzw. z' und z_1 in Y bestehenden Gleichungen sind. Man verifiziert nun unmittelbar:

$$\begin{aligned}
d\eta(z)^{-1} &\equiv -\frac{G_y}{G_z}\,dz^{-1} \equiv -\frac{G_{0y}}{G_{0z}}\,dz^{-1} \equiv \frac{d\alpha}{dy}\,dz^{-1},\\
d\eta(z')^{-1} &\equiv -\frac{H_y}{H_{z'}}\,dz'^{-1} \equiv -\frac{H_{0y}}{H_{0z'}}\,dz'^{-1} \equiv \frac{d\alpha'}{dy}\,dz'^{-1},\\
(1)\qquad -\frac{F_y}{F_z}\,dz^{-1} &\equiv -\frac{F_{0y}}{F_{0z}}\,dz^{-1} \equiv -\frac{G_{0y}}{G_{0z}}\,dz^{-1} + \frac{H_{0y}}{G_{0z}}\,dz^{-1}\\
&\equiv d\eta(z)^{-1} - \frac{H_{0y}}{G_{0z_1}}\,dz_1^{-1} \equiv d\eta(z)^{-1} - \frac{H_{0y}}{H_{0z_1}}\,dz_1^{-1}\\
&\equiv d\eta(z)^{-1} + \frac{H_{0y}}{H_{0z'}}\,dz'^{-1},
\end{aligned}$$

also

$$-\frac{F_y}{F_z}\,dz^{-1} \equiv d\eta(z)^{-1} - d\eta(z')^{-1}; \tag{2}$$

die letzten Formeln sind sämtlich als Kongruenzen modulo den bei $\mathfrak{P}$ ganzen Differentialen zu verstehen.

Sind z oder z' an der Stelle $\mathfrak{P}$ unendlich, so betrachtet man die Polynome

$$\overline{F}\left(\frac{1}{z}, z'\right) = \frac{1}{z^a} F(z, z')$$

bzw.

$$\overline{F}\left(z, \frac{1}{z'}\right) = \frac{1}{z'^a} F(z, z')$$

bzw.

$$\overline{F}\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z'}\right) = \frac{1}{z^a z'^b} F(z, z'),$$

wobei a und b genügend groß zu wählen ist. Man verifiziert im ersten und dritten Falle

$$-\frac{F_y}{F_z}\,dz^{-1} \equiv -\frac{\overline{F}_y}{\overline{F}_{\frac{1}{z}}}\,d\left(\frac{1}{z}\right)^{-1},$$

woraus man wieder die Formel (2) erhält. Da $\frac{1}{z}$ bei $\mathfrak{P}$ den konstanten Wert $\alpha = 0$ hat, ist hier

$$d\eta(z)^{-1} \equiv 0 \quad \text{für } z = \infty. \tag{1a}$$

Analoges gilt im zweiten Falle. Die Formel (2) stellt den Inhalt der ersten Teichmüllerschen Vermutung dar.

Zum Schluß soll noch die zweite Teichmüllersche Vermutung für hyperelliptische Körper verifiziert werden. Es sei $K = Y(z, z')$ mit

$$z'^2 = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{2g+1}) = f(z).$$

Dann sind

$$d\zeta^k_{1i} = \frac{z^i}{f(z)}\,dz^2 \quad (0 \leqq i \leqq 2g-2),$$

$$d\zeta^2_{2i} = \frac{z^i}{z'}\,dz^2 \qquad (0 \leqq i \leqq g-3)$$

alle ganzen Differentiale der Dimension 2. Nach dem Hilfssatz der vorangehenden Arbeit (S. 2) hat man $d\eta^{-1} \sim 0$ dann und nur dann, wenn

$$\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}}(d\eta^{-1} d\zeta^2_{1i}) = 2 \sum_{\nu=1}^{2g+1} \frac{d\alpha_\nu}{dy} \frac{\alpha_\nu^i}{f'(\alpha_\nu)} = 0 \tag{3}$$

für $0 \leqq i \leqq 2g-2$ gilt; die Relationen

$$\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}}(d\eta^{-1} d\zeta^2_{2i}) = 0$$

sind stets identisch erfüllt. Die Gleichungen (3) bleiben richtig, wenn man die α_ν einer und derselben linearen Transformation

$$\alpha_\nu \to \alpha\alpha_\nu + \beta$$

unterwirft. Es darf daher $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ angenommen werden. Es bleiben für die $2g-1$ unbekannten Funktionen $\frac{d\alpha_3}{dy}, \ldots, \frac{d\alpha_{2g+1}}{dy}$ dann $2g-1$ homogene lineare Gleichungen mit einer von Null verschiedenen Determinante. (3) ist demnach dann und nur dann erfüllt, wenn sich die α_ν durch eine lineare Substitution in Konstanten überführen lassen, oder mit anderen Worten, wenn K sich als $Y(z, z')$ mit einer von y unabhängigen Gleichung $F(z, z') = 0$ definieren läßt. Das ist gerade der Inhalt der zweiten Teichmüllerschen Vermutung.

Eingegangen 3. März 1941.

Über Interpolation.*)

Von *Otto Braunschmidt* in München.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit enthält Betrachtungen über Interpolation im weiteren Sinne, d. h. über die angenäherte Darstellung einer Funktion $f(x)$ durch einen linearen Ausdruck von der Form

$$P_n(x) = A_0 u_0(x) + A_1 u_1(x) + \cdots + A_n u_n(x) ,$$

wobei die *Grundfunktionen*

$$u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$$

gegebene linear unabhängige Funktionen sind. Vorausgesetzt wird, daß die Funktionswerte von $f(x)$ auf einer gewissen Menge von *Interpolationsstellen* $x = t$ bekannt sind, allenfalls mit Fehlern behaftet.

Es gibt eine Reihe von Verfahren zur Bestimmung von Näherungsfunktionen $P_n(x)$; die wichtigsten sind

a) die Lagrangesche Interpolationsformel[1]),
b) die Interpolation nach der von C. F. Gauß entwickelten Methode der kleinsten Quadrate[2]),
c) die Interpolationsmethode von A. Cauchy[3]),
d) ein Interpolationsverfahren von P. L. Tschebyscheff[4]),
e) das Verfahren von J. Fischer-Hinnen[5]).

Alle diese Verfahren, so verschieden ihre Vorschriften für die praktische Durchführung auch sein mögen, beruhen auf demselben Gedanken. Trotzdem scheint eine einheitliche Darstellung dieser Methoden in der mathematischen Literatur nicht vorhanden zu sein.

Im ersten Teil dieser Arbeit soll deshalb eine allgemeine Interpolationsmethode dargestellt werden, die alle genannten Verfahren als Spezialfälle enthält. Der Grundgedanke dieses allgemeinen Verfahrens ist folgender:

Man kann die Bestimmung einer Näherungsfunktion $P_n(x)$ zurückführen auf die Aufgabe, das Gleichungssystem

$$A_0 u_0(t) + A_1 u_1(t) + \cdots + A_n u_n(t) = f(t),$$

---

*) Von der Technischen Hochschule München genehmigte Dissertation (D 91). Berichterstatter: Prof. Dr. G. Faber und Prof. Dr. Baldus.

[1]) Darstellungen dieser Methode findet man in den meisten Lehrbüchern, z. B. bei G. Kowalewski, Interpolation und genäherte Quadratur (1932), S. 1.

[2]) Siehe z. B. C. Runge und H. König, Vorlesungen über numerisches Rechnen (1924), S. 189.

[3]) A. Cauchy, Mémoire sur l'interpolation, Journal de Math. de Liouville (1) 2 (1837), p. 193.

[4]) P. L. Tschebyscheff, Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations (1858), Oeuvres 1, p. 387.

[5]) J. Fischer-Hinnen, Methode zur schnellen Bestimmung harmonischer Wellen, Elektrotechnische Zeitschrift 22 (1901), S. 396.

wobei t alle Interpolationsstellen durchläuft, wenigstens näherungsweise nach den Unbekannten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ aufzulösen. Wir nehmen an, daß die Anzahl der Interpolationsstellen mindestens so groß ist, wie die Anzahl der Unbekannten; die Interpolationsstellen können auch ein ganzes Intervall $a \leqq t \leqq b$ ausfüllen.

Aus diesem im allgemeinen unlösbaren Gleichungssystem werden durch lineare Kombination $n+1$ *Normalgleichungen* gebildet, die eindeutig nach den Unbekannten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ lösbar sind. Zu diesem Zwecke führen wir ein zweites System linear unabhängiger Funktionen ein, die *Multiplikatoren*

$$v_0(x), v_1(x), \ldots, v_n(x).$$

Die Aufstellung der h-ten Normalgleichung geschieht dann so, daß man die Gleichungen

$$A_0 u_0(t) + A_1 u_1(t) + \cdots + A_n u_n(t) = f(t)$$

mit $v_h(t)$ multipliziert und über alle Interpolationsstellen t summiert. Im Falle endlich vieler Interpolationsstellen lauten die Normalgleichungen:

$$\sum_t v_h(t) P_n(t) = \sum_t v_h(t) f(t) \qquad (h = 0, 1, \ldots, n).$$

Wenn die Interpolationsstellen ein ganzes Intervall ausfüllen, sind die Summen durch Integrale zu ersetzen.

Damit ist das Interpolationsproblem zurückgeführt auf die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen. Das Ergebnis läßt sich auf die folgende Form bringen:

$$P_n(x) = \sum_t f(t) K_n(t, x).$$

Der *Kern* $K_n(t, x)$ ist eine bilineare Form der Größen

$$u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$$
$$v_0(t), v_1(t), \ldots, v_n(t).$$

Wir werden zeigen, daß der Kern auf die folgende einfache Gestalt gebracht werden kann:

$$K_n(t, x) = \chi_0(t)\varphi_0(x) + \chi_1(t)\varphi_1(x) + \cdots + \chi_n(t)\varphi_n(x),$$

wobei

$\varphi_h(x)$ ein linearer Ausdruck in $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_h(x)$,

$\chi_h(t)$ ein linearer Ausdruck in $v_0(t), v_1(t), \ldots, v_h(t)$

ist und zwar so gestaltet, daß diese neuen Funktionen zueinander biorthogonal sind, d. h. daß

$$\sum_t \chi_h(t)\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } h \neq k \\ 1, & \text{wenn } h = k. \end{cases}$$

Wenn man die Funktionen $\varphi_h(x)$ als Grundfunktionen, die Funktionen $\chi_h(t)$ als Multiplikatoren wählt, so kann das entsprechende Interpolationsverfahren sehr einfach in der folgenden Weise beschrieben werden:

Die Koeffizienten $B_0, B_1, \ldots, B_n$ der Näherungsfunktion

$$P_n(x) = B_0\varphi_0(x) + B_1\varphi_1(x) + \cdots + B_n\varphi_n(x)$$

sind bestimmt durch

$$B_h = \sum_t f(t)\chi_n(t) \qquad (h = 0, 1, \ldots, n).$$

Unter allen Interpolationsverfahren dieser Art ist die Methode der kleinsten Quadrate dadurch ausgezeichnet, daß bei ihr die Multiplikatoren $\chi_h(x)$ mit den Grundfunktionen $\varphi_h(x)$ identisch sind, letztere bilden also ein Orthogonalsystem. Die Herleitung dieses Orthogonalsystems findet man bei P. L. Tschebyscheff[6]) mit Hilfe von

[6]) P. L. Tschebyscheff, Sur les fractions continues (1855), Oeuvres 1, p. 203.

Kettenbrüchen, einfacher bei J. P. Gram[7]) mit Hilfe von Determinanten. Die im ersten Teil dieser Arbeit angewandte Methode zur Entwicklung des Kernes nach Funktionen eines Biorthogonalsystems benutzt ebenfalls Determinanten, ist aber nicht nur auf die Methode der kleinsten Quadrate anwendbar, sondern gilt für alle Interpolationsverfahren, die von irgendeinem System von Grundfunktionen und Multiplikatoren in dem eingangs erklärten Sinn ausgehen.

Im ersten Teil soll weiter gezeigt werden, daß die verschiedenen Interpolationsverfahren sich nicht nur formal einheitlich behandeln lassen, sondern daß auch die praktische Durchführung in allen Fällen auf die gleiche Weise geschehen kann. Als besonders geeignet erweist sich dabei das Verfahren, welches A. Cauchy bei seiner Methode zur Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen angegeben hat[8]). Was die einzelnen Interpolationsmethoden voneinander unterscheidet, liegt einzig und allein in der Wahl der Multiplikatoren.

Das Cauchysche Verfahren zur Auflösung der Normalgleichungen hat weiter den Vorteil, daß es von selbst auf die oben erwähnte Entwicklung nach den Funktionen eines Biorthogonalsystems führt.

Der zweite Teil dieser Arbeit enthält eine ausführlichere Behandlung der oben angeführten speziellen Interpolationsverfahren; insbesondere soll die Methode der kleinsten Quadrate noch von anderer Seite beleuchtet werden. Die Frage nach der besten Interpolationsmethode kann vom theoretischen Standpunkt aus nicht eindeutig beantwortet werden, worauf schon C. F. Gauß hingewiesen hat. In der Praxis ist es jedoch allgemein üblich, die Methode der kleinsten Quadrate als die beste Interpolationsmethode anzuerkennen. Wir schließen uns diesem Brauch an, weil die Methode der kleinsten Quadrate zwei verschiedene Minimumeigenschaften hat, wie C. F. Gauß in seiner „Theoria motus" einerseits und in der „Theoria combinationis observationum" anderseits ausgeführt hat[9]).

Das erste Minimumproblem geht von der Annahme aus, daß die Funktionswerte $f(t)$ in den Interpolationsstellen fehlerfrei gegeben sind und daß die *mittlere Abweichung* der Näherungsfunktion $P_n(x)$ von der gegebenen Funktion gemessen wird durch die Formel

$$\sqrt{\frac{1}{N}\sum_t [P_n(t) - f(t)]^2},$$

wobei die Summe über alle Interpolationsstellen zu erstrecken ist und N die Anzahl der Interpolationsstellen bezeichnet. Falls die Interpolationsstellen ein Intervall $a \leqq t \leqq b$ bilden, nimmt man statt dessen die Formel

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [P_n(t) - f(t)]^2\, dt}.$$

Die Methode der kleinsten Quadrate hat dann die Eigenschaft, diesen Ausdruck zu einem Minimum zu machen.

Beim zweiten Minimumproblem dagegen nimmt man an, daß die zu interpolierende Funktion $f(x)$ an jeder Interpolationsstelle $x = t$ den gleichen mittleren Faktor μ hat. Nach Gauß ist dann der *mittlere Fehler* für die Näherungsfunktion

---

[7]) J. P. Gram, Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate, Journal f. d. reine u. angew. Math. 94 (1883), S. 41.

[8]) In der Note von E. Carvallo, Formules d'interpolation, C. R. 56 (1888), p. 346, wird schon gezeigt, daß auch die Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate nach dem Cauchyschen Verfahren durchgeführt werden kann.

[9]) C. F. Gauß, a) Theoria motus corporum coelestium (1809), Werke 7, S. 240. b) Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae (1821—1826), Werke 4, S. 1.

$$P_n(x) = \sum_t f(t)K_n(t, x) \text{ bzw. } = \int_a^b f(t)K_n(t, x)dt$$

gegeben durch die Formel

$$\mu \cdot \sqrt{\sum_t [K_n(t, x)]^2} \text{ bzw. durch } \mu \cdot \sqrt{\int_a^b [K_n(t, x)]^2 dt}.$$

Das zweite Minimumproblem verlangt, diesen Ausdruck für jedes x des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ zu einem Minimum zu machen. C. F. Gauß hat in seiner „Theoria combinationis observationum" für den Fall endlich vieler Interpolationsstellen gezeigt, daß beide Minimumprobleme die nämliche Lösung haben.

Wir werden im zweiten Teil diesen Beweis für den Fall zusammenstellen, daß die Interpolationsstellen ein Intervall $a \leqq x \leqq b$ bilden; denn in der Literatur wird in diesem Falle nur das erste Minimumproblem behandelt[10]).

Im zweiten Teil werden ferner für die Methoden von Cauchy, Tschebyscheff und Fischer-Hinnen die ersten Funktionen des Orthogonalsystems wirklich ausgerechnet. Schließlich soll das Tschebyscheffsche Verfahren auch in der von H. Bruns[11]) angebenen abgeänderten Form dargestellt werden. Dabei zeigt sich, daß das Verfahren von Fischer-Hinnen sich nur wenig von diesem Brunsschen Verfahren unterscheidet.

Der dritte Teil dieser Arbeit endlich enthält zunächst ein spezielles Beispiel für die Annäherung durch gewöhnliche Polynome, d. h. mit den Grundfunktionen

$$u_n = x^n$$

und zwar soll dabei die Methode von A. Cauchy mit der Methode der kleinsten Quadrate verglichen werden. Es wird sich ergeben, daß im allgemeinen die Cauchysche Methode durchaus gleichberechtigt neben der Methode der kleinsten Quadrate angewendet werden kann.

Schließlich bringen wir noch einen Beitrag zu der für die Anwendung wichtigen Frage, wie weit die Näherungsfunktionen der Interpolationsmethoden von A. Cauchy und von P. L. Tschebyscheff von denen der Methode der kleinsten Quadrate abweichen. Da die allgemeine Untersuchung auf zu große Schwierigkeiten stößt, sollen nur die mittleren Fehler für $n \leqq 7$ miteinander verglichen werden. Für praktische Zwecke dürfte dies durchaus ausreichend sein. Es wird sich auch hier herausstellen, daß man bei nicht zu großen Anforderungen die Methode der kleinsten Quadrate durch die von Cauchy oder von Tschebyscheff ersetzen kann.

I. Teil

Ein allgemeines Interpolationsverfahren.

§ 1. Beschreibung des Verfahrens.

Die Grundaufgabe der Interpolation lautet: Gegeben sind

1) die Werte einer Funktion $f(x)$ auf einer gewissen Menge $\mathfrak{M}$ von *Interpolationsstellen* t,
2) $n + 1$ linear unabhängige Funktionen, die *Grundfunktionen*

$$u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x).$$

Gesucht wird ein Ausdruck von der Form

$$P_n(x) = A_0u_0(x) + A_1u_1(x) + \cdots + A_nu_n(x),$$

der die Funktion $f(x)$ näherungsweise darstellt.

[10]) Vgl. z. B. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik 1 (1924), S. 35.

[11]) H. Bruns, Über ein Interpolationsverfahren von Tschebyscheff, Astronomische Nachrichten 146 (1898) S. 161.

Für die Menge $\mathfrak{M}$ von Interpolationsstellen kommen in der Hauptsache die folgenden Fälle in Betracht:

A) $\mathfrak{M}$ besteht aus endlich vielen (verschiedenen) Punkten des Intervalls (a, b):

$$t_0, t_1, \ldots, t_m.$$

B) $\mathfrak{M}$ besteht aus allen Punkten des Intervalls (a, b):

$$a \leqq t \leqq b.$$

Der Fall B) kann als Grenzfall von A) angesehen werden.

Als Grundfunktionen wählt man meistens die Potenzen

$$1, x, x^2, x^3, \ldots$$

oder die trigonometrischen Funktionen

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots$$
$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots$$

Es können aber auch andere Funktionensysteme als Grundfunktionen auftreten.

Die Anzahl $n + 1$ der Grundfunktionen soll im Fall A) nicht größer als die Anzahl $m + 1$ der Interpolationsstellen sein, da sonst das Problem unbestimmt wird; im Fall B) dagegen unterliegt n keiner Beschränkung.

Die Abweichung zwischen der Näherungsfunktion $P_n(x)$ und der gegebenen Funktion $f(x)$ bezeichnen wir mit $L(x)$, also

$$L(x) = P_n(x) - f(x).$$

Die Grundaufgabe der Interpolation wird erst dadurch zu einer bestimmten Aufgabe, daß noch weitere Forderungen über die Größe der Abweichungen $L(t)$ in den Interpolationsstellen hinzutreten. Um ein möglichst allgemeines Verfahren zu finden, verzichten wir jedoch auf Minimalforderungen und verlangen in Analogie zur Methode der kleinsten Quadrate die Erfüllung gewisser Normalgleichungen.

Zu diesem Zwecke sei ein zweites System linear unabhängiger Funktionen gegeben, die *Multiplikatoren*

$$v_0(x), v_1(x), \ldots, v_n(x).$$

Wie wir gleich sehen werden, brauchen diese Multiplikatoren nur in den Interpolationsstellen definiert zu sein.

Normalgleichungen nennen wir die folgenden Bedingungen:

im Fall A: $$\sum_{k=0}^{m} v_h(t_k)\, L(t_k) = 0$$

im Fall B: $$\int_a^b v_h(t)\, L(t)\, dt = 0$$

$$(h = 0, 1, \ldots, n).$$

Das sind in jedem Fall $n + 1$ lineare Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ der Näherungsfunktion $P_n(x)$.

Diese verallgemeinerten Normalgleichungen lassen sich formal ebenso behandeln wie die der Methode der kleinsten Quadrate. Wir werden aber im zweiten Teil dieser Arbeit sehen, daß auch die anderen in der Einleitung genannten Interpolationsverfahren sich als Spezialfälle unserer allgemeinen Interpolationsmethode ergeben.

Um die Schreibweise abzukürzen und um die Fälle A) und B) nicht immer getrennt behandeln zu müssen, soll folgende Bezeichnung eingeführt werden:

$$(gh) = (hg) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m} g(t_k)\, h(t_k) & \text{im Falle A)} \\ \int_a^b g(t)\, h(t)\, dt & \text{im Falle B).} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Bezeichnung können die Normalgleichungen folgendermaßen geschrieben werden:

$$A_0(v_h u_0) + A_1(v_h u_1) + \cdots + A_n(v_h u_n) = (v_h f) \qquad (h = 0, 1, \ldots, n).$$

Im Falle B) setzen wir natürlich voraus, daß alle auftretenden Integrale existieren[13]).

Die Multiplikatoren sollen natürlich so beschaffen sein, daß dieses Gleichungssystem für jede zu interpolierende Funktion $f(x)$ und für jedes zulässige n eindeutig lösbar wird. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Determinanten

$$D_n(u_h, v_h) = \begin{vmatrix} (v_0 u_0) \ldots (v_0 u_n) \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ (v_n u_0) \ldots (v_n u_n) \end{vmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

nicht Null sind.

Die oben genannten Voraussetzungen, daß die Grundfunktionen und die Multiplikatoren untereinander linear unabhängig sein sollen, sind notwendig für das Nichtverschwinden von D; sie sind jedoch im allgemeinen für die Gültigkeit von $D_n \neq 0$ nicht hinreichend, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$u_n = x^{2n}, \quad v_n = x^{2n+1}, \quad \mathfrak{M}: -1 \leqq t \leqq +1.$$

Hier sind zwar die u_n und die v_n unter sich linear unabhängig, aber wegen

$$(v_h u_l) = \int_{-1}^{+1} t^{2h+2l+1} dt = 0$$

sind alle Determinanten $D_n = 0$.

Das hier zu besprechende allgemeine Interpolationsverfahren kann nunmehr folgendermaßen beschrieben werden:

Sind die Grundfunktionen

(1) $$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots$$

und die Multiplikatoren

(2) $$v_0(x), v_1(x), v_2(x), \ldots$$

so gewählt, daß die Determinanten

(3) $$D_n(u_h, v_h) \neq 0$$

sind für $n \leqq m$ im Falle A) *bzw. für jedes n im Falle* B), *dann wird im Intervall (a, b) der Funktion $f(x)$ diejenige eindeutig bestimmte Interpolationsfunktion*

(4) $$P_n(x) = A_0 u_0(x) + A_1 u_1(x) + \cdots + A_n u_n(x)$$

zugeordnet, welche den Normalgleichungen

(5) $$(v_h P_n) = (v_h f) \text{ für } h = 0, 1, \ldots, n$$

genügt.

Die eigentliche Aufgabe besteht jetzt in der Auflösung der Normalgleichungen (5). Formal findet man das Ergebnis der Auflösung am einfachsten durch Elimination der Unbekannten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ aus dem folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &A_0(v_0 u_0) + \cdots + A_n(v_0 u_n) - (v_0 f) = 0, \\ &A_1(v_1 u_0) + \cdots + A_n(v_1 u_n) - (v_1 f) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &A_n(v_n u_0) + \cdots + A_n(v_n u_n) - (v_n f) = 0, \\ &A_0 u_0(x) + \cdots + A_n u_n(x) - P_n(x) = 0. \end{aligned}$$

[13]) Abgesehen von einer Stelle im zweiten Teil, wo wir das Lebesguesche Integral verwenden, ist es gleichgültig, welcher Integralbegriff zugrunde gelegt wird.

Die $n+1$ ersten Zeilen sind die Normalgleichungen, die letzte Zeile ist die Definitionsgleichung für $P_n(x)$. Dieses System ist homogen in Bezug auf die $n+2$ Größen

$$A_0, A_1, \ldots, A_n, -1.$$

Da diese nicht alle Null sind, so muß

$$\begin{vmatrix} (v_0u_0) & \cdots & (v_0u_n) & (v_0f) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ (v_nu_0) & \cdots & (v_nu_n) & (v_nf) \\ u_0(x) & \cdots & u_n(x) & P_n(x) \end{vmatrix} = 0$$

sein. Die letzte Zeile dieser Determinante fassen wir auf als Summe zweier Zeilen mit den Gliedern

$$u_0(x), \ldots, u_n(x), \quad 0$$
$$0 \quad , \ldots, \quad 0 \quad , P_n(x).$$

Demgemäß kann diese Determinante als Summe zweier Determinanten geschrieben werden, die sich nur in der letzten Zeile unterscheiden. Nach Division mit der nichtverschwindenden Determinante D_n erhält man

$$(6) \qquad P_n(x) = \frac{-1}{D_n(u_\lambda v_\lambda)} \begin{vmatrix} (v_0u_0) & \cdots & (v_0u_n) & (v_0f) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ (v_nu_0) & \cdots & (v_nu_n) & (v_nf) \\ u_0(x) & \cdots & u_n(x) & 0 \end{vmatrix}.$$

Das ist die Lösung unserer Interpolationsaufgabe. Die Funktionswerte $f(t)$ gehen also linear in die Näherungsfunktion $P_n(x)$ ein. Es wird dies noch deutlicher, wenn wir bei der in (6) ausgeschriebenen Determinante die in der letzten Spalte enthaltenen Summationen bzw. Integrationen vor die Determinante ziehen. Mit Hilfe des Kernes

$$(7) \qquad K_n(t, x) = \frac{-1}{D_n} \begin{vmatrix} (v_0u_0) & \cdots & (v_0u_n) & v_0(t) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ (v_nu_0) & \cdots & (v_nu_n) & v_n(t) \\ u_0(x) & \cdots & u_n(x) & 0 \end{vmatrix}$$

kann dann die Näherungsfunktion in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{m} K_n(t_k, x)\, f(t_k) \quad \text{im Falle A)}$$

bzw.

$$P_n(x) = \int_a^b K_n(t, x)\, f(t)dt \quad \text{im Falle B).}$$

2. Entwicklung der Näherungsfunktion nach einem Biorthogonalsystem.

Wir wollen nun die Lösung noch auf eine andere Form bringen, die auf die Frage Auskunft gibt, wie sich die Näherungsfunktion $P_{n+1}(x)$ von der Näherungsfunktion $P_n(x)$ unterscheidet. Wir erreichen dies durch Umformung des Kernes (7).

Der Kern $K_n(t, x)$ bleibt offenbar ungeändert, wenn $u_h(x)$ durch

$$(8) \qquad \varphi_h(x) = p_h(u_h + C_{h,h-1}u_{h-1} + \cdots + C_{h,0}u_0)$$

mit beliebigen $C_{h,0}, \ldots, C_{h,h-1}$ und $p_h \neq 0$ ersetzt wird.

Die Zahlen $C_{h,0}, \ldots, C_{h,h-1}$ sollen speziell so gewählt werden, daß in der Determinante D_n rechts von der Hauptdiagonale lauter Nullen stehen, d. h. daß

$$(9) \qquad (v_k\varphi_h) = 0 \text{ für } k < h.$$

Diese Bedingungen können eindeutig erfüllt werden, denn die Gleichungen (9) sind gleichbedeutend mit dem folgenden Gleichungssystem

$$C_{k,0}(v_k u_0) + \cdots + C_{k,k-1}(v_k u_{k-1}) = -(v_k u_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, h-1),$$

dessen Determinante D_{k-1} nach Voraussetzung (3) von Null verschieden ist.

Fügt man zu diesem Gleichungssystem noch die Definitionsgleichung (8) für φ_k hinzu, so erhält man durch Elimination der $C_{k,0}, \ldots, C_{k,k-1}$ nach demselben Verfahren wie oben bei der Berechnung von $P_n(x)$ die Lösung

$$(10) \qquad \varphi_k(x) = \frac{p_k}{D_{k-1}} \begin{vmatrix} (v_0 u_0) & \cdots & (v_0 u_k) \\ \cdot & \cdots & \\ (v_{k-1} u_0) & \cdots & (v_{k-1} u_k) \\ u_0(x) & \cdots & u_k(x) \end{vmatrix} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\varphi_0(x) = p_0 u_0(x).$$

Die Zahlen p_k sind beliebig und können zur Normierung von $\varphi_k(x)$ verwendet werden.

Da die Funktionen $u_k(x)$ und $v_k(x)$ bei der Bildung des Kernes (7) symmetrisch auftreten, kann man auf die eben beschriebene Weise an Stelle der Funktionen $v_k(x)$ die neuen Funktionen

$$(11) \qquad \chi_k(x) = \frac{q_k}{D_{k-1}} \begin{vmatrix} (v_0 u_0) & \cdots & (v_0 u_{k-1}) & v_0(x) \\ & \cdots & \cdot & \cdot \\ (v_k u_0) & \cdots & (v_k u_{k-1}) & v_k(x) \end{vmatrix} \quad \text{für } h = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\chi_0(x) = q_0 v_0(x)$$

einführen. Man erreicht dadurch, daß in der Determinante D_n auch links von der Hauptdiagonale lauter Nullen stehen, d. h. es gilt

$$(12) \qquad (\chi_k u_k) = 0 \text{ für } k < h.$$

Die Konstanten q_k sind ebenfalls beliebig und von Null verschieden. Wir wollen jedoch festsetzen, daß die p_k und die q_k so bestimmt werden, daß

$$(13) \qquad (\chi_k \varphi_k) = 1.$$

Nun ist aber für $h \geqq 1$

$$\begin{aligned}(\chi_k \varphi_k) &= q_k[(v_k \varphi_k) + d_{k,k-1}(v_{k-1} \varphi_k) + \cdots + d_{k,0}(v_0 \varphi_k)] \\ &= q_k(v_k \varphi_k) \text{ nach (9)} \\ &= q_k p_k \frac{D_k}{D_{k-1}} \text{ gemäß (10).}\end{aligned}$$

Für $h = 0$ dagegen ergibt sich

$$(\chi_0 \varphi_0) = p_0 q_0 (u_0 v_0) = p_0 q_0 D_0,$$

d. h. die Normierungskonstanten p_k und q_k müssen die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$(14) \qquad p_k q_k = \frac{D_{k-1}}{D_k} \quad \text{für } k \geqq 1, \quad p_0 q_0 = \frac{1}{D_0}.$$

Aus den Bedingungen (9) folgt nun weiter für $k < h$

$$(\chi_k \varphi_k) = q_k[(v_k \varphi_k) + d_{k,k-1}(v_{k-1} \varphi_k) + \cdots + d_{k,0}(v_0 \varphi_k)] = 0$$

und für $k > h$ folgt aus (12)

$$(\chi_k \varphi_k) = p_k[(\chi_k u_k) + C_{k,k-1}(\chi_k u_{k-1}) + \cdots + C_{k,0}(\chi_k u_0)] = 0.$$

Diese Beziehungen zusammen mit den Gleichungen (12) sagen aus, daß die neuen durch (10) definierten Grundfunktionen mit den neuen durch (11) definierten Multiplikatoren ein biorthogonales System bilden, d. h.

$$(15) \qquad (\chi_k \varphi_k) = \begin{cases} 1 \text{ für } k = h \\ 0 \text{ für } k \neq h. \end{cases}$$

Wie wir oben gesehen haben, bleibt durch die Einführung dieser neuen Funktionen der Kern $K_n(t, x)$ ungeändert, folglich auch die Näherungsfunktion $P_n(x)$. Wir können also auch von vornherein mit den Grundfunktionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... und mit den Multiplikatoren $\chi_0(x)$, $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$, ... rechnen. Wir setzen

$$P_n(x) = B_0\varphi_0(x) + B_1\varphi_1(x) + \cdots + B_n\varphi_n(x).$$

Die Normalgleichungen lauten dann

$$(\chi_h P_n) = (\chi_h f) \text{ für } h = 0, 1, \ldots, n$$

oder auf Grund der Biorthogonalitätsbeziehungen (15)

$$B_h = (\chi_h f).$$

Die Näherungsfunktion $P_n(x)$ hat jetzt die einfache Gestalt

$$P_n(x) = (\chi_0 f)\varphi_0(x) + (\chi_1 f)\varphi_1(x) + \cdots + (\chi_n f)\varphi_n(x) \tag{16}$$

und der zugehörige Kern lautet

$$K_n(t, x) = \chi_0(t)\varphi_0(x) + \chi_1(t)\varphi_1(x) + \cdots + \chi_n(t)\varphi_n(x). \tag{17}$$

Jetzt läßt sich auch die zu Beginn dieses Paragraphen gestellte Frage nach dem Unterschied zwischen $P_{n+1}(x)$ und $P_n(x)$ leicht beantworten:

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = (\chi_{n+1} f)\varphi_{n+1}(x).$$

Bei der Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate ist diese Entwicklung allgemein bekannt. Dort sind ja die Multiplikatoren mit den Grundfunktionen identisch[13]), also auch

$$\chi_h(x) = \varphi_h(x).$$

Aus den Biorthogonalitätsbeziehungen werden die Orthogonalitätsbeziehungen

$$(\varphi_k \varphi_h) = \begin{cases} 1 \text{ für } k = h \\ 0 \text{ für } k \neq h, \end{cases}$$

und der Ausdruck $P_n(x)$ stellt die Entwicklung der Funktion $f(x)$ nach den orthogonalen Funktionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... bis zu den Gliedern n-ter Ordnung dar.

Bei unserer Verallgemeinerung treten daher an die Stelle des Orthogonalsystems die beiden durch (10) und (11) definierten biorthogonalen Systeme:

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$$
$$\chi_0(x), \chi_1(x), \chi_2(x), \ldots.$$

Übrigens liefert jedes System von Grundfunktionen und Multiplikatoren, das aus den ursprünglichen Funktionen $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots$ und $v_0(x), v_1(x), v_2(x), \ldots$ durch Linearkombinationen der Gestalt

$$\bar{u}_n(x) = a_{n0}u_0(x) + \cdots + a_{nn}u_n(x),$$
$$\bar{v}_n(x) = b_{n0}v_0(x) + \cdots + b_{nn}v_n(x)$$

hervorgeht, die nämlichen biorthogonalen Funktionensysteme wie die ursprünglichen Funktionen selbst. Das erkennt man unmittelbar durch geeignete Umformungen der in (10) und (11) auftretenden Determinanten.

Zum Schluß noch ein Wort über die Normierungskonstanten. Meistens wird man $p_h = 1$ wählen, also gemäß (14)

$$q_0 = \frac{1}{D_0}; \quad q_h = \frac{D_{h-1}}{D_h}.$$

Oft ist es aber zweckmäßig, $p_h = q_h$ zu setzen. Man muß dazu gegegebenenfalls bei

[13]) Näheres im 2. Teil.

einem Teil der Multiplikatoren $v_h(x)$ durch $-v_h(x)$ ersetzen, damit die Determinanten D_n positiv werden. Dann ist

$$p_0 = q_0 = \sqrt{\frac{1}{D_0}}, \quad p_h = q_h = \sqrt{\frac{D_{h-1}}{D_h}} \text{ für } h = 1, 2, 3, \ldots.$$

§ 3. Praktische Durchführung.

Bei der rechnerischen Durchführung dieses Interpolationsverfahrens sind zwei Schritte zu unterscheiden:

1) die Aufstellung der Normalgleichungen,

2) die Berechnung der Unbekannten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ aus den Normalgleichungen.

Zur Auflösung der Normalgleichungen können natürlich alle bekannten Methoden für die Lösung linearer Gleichungssysteme angewendet werden. Für die praktische Rechnung ist die Methode der schrittweisen Elimination wohl die beste. Sie ist für die Normalgleichungen der Methode der kleinsten Quadrate in allen Einzelheiten durchgebildet und kann ohne weiteres auf die allgemeinen Normalgleichungen übertragen werden.

Es gibt aber Fälle, in denen man die genannten Schritte nicht getrennt hintereinander ausführen kann, z. B. bei der Methode von A. Cauchy. Bei dieser wird der Multiplikator v_n erst aus der biorthognalen Grundfunktion $\varphi_n(x)$ (siehe (10)) bestimmt. $\varphi_n(x)$ hängt nur von $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ ab, kann also selbst zur Bestimmung von v_n dienen. Wenn man nun nicht von vornherein alle $\varphi_n(x)$ und $\chi_n(x)$ berechnet und wenn weiter die Ordnung n der Näherungsfunktion $P_n(x)$ zu Beginn der Rechnung noch nicht festliegt, kann man die oben genannten Methoden nicht ohne weiteres anwenden. Für diesen Fall hat nun A. Cauchy eine Anordnung der Rechnung gegeben, die aber auch im allgemeinen Fall angewendet werden kann. Sie besteht aus folgenden Schritten:

1) Aus dem ursprünglichen Gleichungssystem

$$A_0 u_0(t) + A_1 u_1(t) + \cdots + A_n u_n(t) = f(t) \quad (t \text{ aus } \mathfrak{M}) \tag{18}$$

wird mit Hilfe von $v_0(t)$ die erste Normalgleichung gebildet.

2) Aus dem System (18) wird die Unbekannte A_0 eliminiert und zwar so, daß von jeder einzelnen Gleichung ein geeignetes Vielfache der ersten Normalgleichung abgezogen wird.

3) Mit dem neuen Gleichungssystem wird ebenso verfahren, d. h. Bildung der zweiten Normalgleichung und Elimination von A_1 usw.

Wir wollen dieses Verfahren etwas genauer darstellen und dabei zeigen, daß sich die Grundfunktionen $\varphi_h(x)$ des biorthogonalen Systems dabei von selbst ergeben.

Die Umformung des Gleichungssystems (18) beim ersten Schritt kann auf folgende Weise dargestellt werden:

Ausgehend von

$$L = A_0 u_0 + A_1 u_1 + \cdots + A_n u_n - f$$

bilden wir, um A_0 zu eliminieren,

$$\Delta L = L - \frac{(v_0 L)}{(v_0 u_0)} u_0.$$

Setzen wir außerdem

$$\Delta u_h = u_h - \frac{(v_0 u_h)}{v_0 u_0} u_0 \quad \text{und} \quad \Delta f = f - \frac{(v_0 f)}{(v_0 u_0)} u_0,$$

so lautet das Ergebnis der Elimination:

$$\Delta L = A_1 \Delta u_1 + \cdots + A_n \Delta u_n - \Delta f.$$

Nun ist aber $(v_0 L) = 0$ die erste Normalgleichung, also dem Zahlenwert nach:

$$\Delta L = L.$$

Allgemein: Aus

$$\Delta^k L = A_k \Delta^k u_k + \cdots + A_n \Delta^k u_n - \Delta^k f$$

wird A_k eliminiert durch Bildung von

$$\Delta^{k+1} L = \Delta^k L - \frac{(v_k \Delta^k L)}{(v_k \Delta^k u_k)} \Delta^k u_k = A_{k+1} \Delta^{k+1} u_{k+1} + \cdots + A_n \Delta^{k+1} u_n - \Delta^{k+1} f, \tag{19}$$

wobei

$$\Delta^{k+1} u_h = \Delta^k u_h - \frac{(v_k \Delta^k u_h)}{(v_k \Delta^k u_k)} \Delta^k u_k \tag{20}$$

und

$$\Delta^{k+1} f = \Delta^k f - \frac{(v_k \Delta^k f)}{(v_k \Delta^k u_k)} \Delta^k u_k. \tag{21}$$

Dem Zahlenwert nach ist

$$\Delta^{k+1} L = \Delta^k L = \cdots = L,$$

weil $(v_k \Delta^k L) = 0$ die $(k+1)$-te Normalgleichung darstellt. Nach Elimination von A_n erhält man schließlich

$$\Delta^{n+1} L = -\Delta^{n+1} f.$$

Nun ist aber nach (21)

$$\begin{aligned} \Delta f &= f - C_0 u_0 \\ \Delta^2 f &= \Delta f - C_1 \Delta u_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^{n+1} f &= \Delta^n f - C_n \Delta^n u_n, \end{aligned}$$

wobei

$$C_k = \frac{(v_k \Delta^k f)}{(v_k \Delta^k u_k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Daher ist

$$\Delta^{n+1} f = f - C_0 u_0 - C_1 \Delta u_1 - \cdots - C_n \Delta^n u_n.$$

Also lautet das Ergebnis:

$$\Delta^{n+1} L = C_0 u_0 + C_1 \Delta u_1 + \cdots + C_n \Delta^n u_n - f.$$

Das heißt zunächst: Durch das Cauchysche Lösungsverfahren erhält man die Näherungsfunktion

$$P_n = C_0 u_0 + C_1 \Delta u_1 + \cdots + C_n \Delta^n u_n$$

und die Fehler

$$L = \Delta^{n+1} L = -\Delta^{n+1} f.$$

Um die Übereinstimmung mit unserer früheren Lösung zu zeigen, wollen wir zuerst feststellen, daß

$$\Delta^k u_k = \varphi_k.$$

Dazu genügt es, die Gleichungen

$$(v_j \Delta^k u_k) = 0 \text{ für } j < k$$

zu prüfen; denn $\Delta^k u_k$ ist, wie man aus (20) sieht, eine lineare Kombination von $u_0, u_1, \ldots, u_k$ und der Koeffizient von u_k ist 1.

Aus (20) ergibt sich aber

$$(v_k \Delta^{k+1} u_h) = (v_k \Delta^k u_h) - \frac{(v_k \Delta^k u_h)}{(v_k \Delta^k u_k)} (v_k \Delta^k u_k) = 0 \quad \text{für alle } h,$$

oder, wenn wir k durch $k-1$ ersetzen,

$$(v_{k-1}\Delta^k u_h) = 0.$$

Wenn schon bewiesen ist, daß

$$(v_{k-r}\Delta^k u_h) = 0 \text{ für alle } h,$$

dann folgt aber aus (20)

$$(v_{k-r-1}\Delta^k u_h) = 0 \text{ für alle } h,$$

d. h.

$$(v_j\Delta^k u_h) = 0 \text{ für } j < k \text{ und } h = 0, 1, \ldots, n.$$

Insbesondere ist also

$$(v_j\Delta^k u_k) = 0 \text{ für } j < k.$$

Folglich ist $\varphi_k = \Delta^k u_k$, was wir beweisen wollten.

Da aber P_n eindeutig bestimmt ist, so ist auch

$$C_k = (\chi_k f).$$

Das Cauchysche Auflösungsverfahren liefert also nach jeder Elimination ein Glied der Entwicklung nach dem Biorthogonalsystem und die Fehler. Will man daher nachträglich die Näherungsfunktion für ein größeres n berechnen, so kann man die alten Rechnungen ohne weiteres benutzen.

II. Teil.

Einige spezielle Verfahren.

§ 1. Kennzeichnung der speziellen Verfahren.

a) *Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate.*

Diese Methode ist mit beliebigen Grundfunktionen $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$ anwendbar. Die Multiplikatoren sind

$$v_h(x) = u_h(x) \quad (h = 0, 1, \ldots, n).$$

Die Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit der Normalgleichungen lauten

im Falle A) endlich vieler Interpolationsstellen $t_0, t_1, \ldots, t_m$:

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} u_0(t_0) & \cdots & u_0(t_m) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ u_n(t_0) & \cdots & u_n(t_m) \end{pmatrix}, \quad n \leqq m, \tag{22}$$

muß den *Rang* n haben; dann sind nämlich die $h+1$ ersten Zeilen linear unabhängig, also[14])

$$D_h = \begin{vmatrix} (u_0u_0) & \cdots & (u_0u_h) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (u_hu_0) & \cdots & (u_hu_h) \end{vmatrix} > 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, n);$$

im Falle B) unendlich vieler Interpolationsstellen $a \leqq t \leqq b$:

Die Grundfunktionen $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$ müssen *linear unabhängig* sein und die Eigenschaft haben, daß

$$\int_a^b u_h^2(t)dt > 0 \text{ [15])} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n);$$

denn unter diesen Voraussetzungen sind die Gramschen Determinanten[14])

$$D_h = \begin{vmatrix} (u_0u_0) & \cdots & (u_0u_h) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (u_hu_0) & \cdots & (u_hu_h) \end{vmatrix} > 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, n).$$

[14]) Siehe z. B. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909, § 134, S. 321

[15]) Die letztere Bedingung ist z. B. für *stetige*, linear unabhängige Funktionen erfüllt.

b) *Interpolationsmethode von A. Cauchy.*

Auch diese Methode ist für beliebige Grundfunktionen $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$ brauchbar. Ihre Multiplikatoren werden durch die Grundfunktionen

$$\varphi_h(x) = u_h(x) + c_{h,\,h-1}u_{h-1}(x) + \cdots + c_{h,0}u_0(x) \quad [16])$$

des zugehörigen Biorthogonalsystems bestimmt:

$$v_h(x) = \operatorname{sg}(\varphi_h(x)) \qquad (h = 0, 1, \ldots, n).$$

Dabei bedeute die Funktion $\operatorname{sg}(x)$ wie üblich

$$\operatorname{sg}(x) = \begin{cases} +1 \text{ falls } x > 0 \\ \;\;0 \text{ falls } x = 0 \\ -1 \text{ falls } x < 0. \end{cases}$$

Die Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit der Normalgleichungen lauten

im Falle A): Die Matrix (22) muß den Rang n haben;

im Falle B): Die Grundfunktionen $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$ müssen *linear unabhängig* sein und die Eigenschaft haben, daß für jede Funktion von der Gestalt

$$f_h(x) = u_h + a_1u_{h-1} + \cdots + a_hu_0$$

das Integral

$$\int_a^b |f_h(t)|\,dt > 0 \quad [17]) \qquad (h = 0, 1, \ldots, n)$$

ist.

Um dies einzusehen, braucht man nur die Determinanten D_h etwas umzuformen. Man findet durch geeignete Spaltenkombination

$$D_h = \begin{vmatrix} (v_0u_0) & \cdots & (v_0u_h) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (v_hu_0) & \cdots & (v_hu_h) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (v_0\varphi_0) & \cdots & (v_0\varphi_h) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (v_h\varphi_0) & \cdots & (v_h\varphi_h) \end{vmatrix} =$$

$$= (v_0\varphi_0)(v_1\varphi_1)\cdots(v_h\varphi_h) \qquad \text{wegen (9).}$$

Im Falle A) ist zunächst

$$(v_0\varphi_0) = (v_0u_0) = \sum_{k=0}^{m} |u_0(t_k)| > 0;$$

denn die Zahlen $u_0(t_k)$ können nicht alle Null sein, weil sonst der Rang der Matrix (22) kleiner als n wäre. Nehmen wir an, daß $D_h > 0$ ist, dann können die Funktionen $\varphi_{h+1}(x)$ gemäß (10) eindeutig berechnet werden. Die Zahlen $\varphi_{h+1}(t_k)$ können aber nicht alle verschwinden, weil in der Matrix (22) die $h+2$ ersten Zeilen linear unabhängig sind. Folglich ist

$$(v_{h+1}\varphi_{h+1}) = \sum_{k=0}^{m} |\varphi_{h+1}(t_k)| > 0.$$

Also ist auch

$$D_{h+1} = D_h \cdot (v_{h+1}\varphi_{h+1}) > 0.$$

Im Falle B) schließt man analog. Man hat nur zu beachten, daß nach Voraussetzung

$$(v_h\varphi_h) = \int_a^b |\varphi_h(t)|\,dt > 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, n).$$

c) *Interpolationsmethode von P. L. Tschebyscheff.*

Diese Methode sowie die beiden folgenden sind im wesentlichen nur für Annäherung durch trigonometrische Polynome geeignet. Wir unterscheiden dabei Annäherung durch

[16]) Vgl. Teil I, § 2 (8).

[17]) Diese Bedingung ist z. B. für *stetige* Funktionen $u_h(x)$ erfüllt.

cos-Polynome und Annäherung durch sin-Polynome. Dementsprechend haben wir zwei Systeme von Grundfunktionen und Multiplikatoren

$$u_h^{(1)} = \cos hx, \qquad u_h^{(2)} = \sin hx,$$
$$v_h^{(1)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sg}(\cos hx), \qquad v_h^{(2)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sg}(\sin hx) \qquad (h = 1, 2, \ldots).$$

Interpolationsstellen sind die Punkte des Intervalles $0 \leqq t \leqq \pi$. Die Normalgleichungen sind eindeutig auflösbar, wie bei der ausführlichen Behandlung dieser Methode gezeigt werden wird.

d) *Interpolationsverfahren von H. Bruns.*

Die Grundfunktionen sind dieselben wie im Falle c). Die Multiplikatoren sind gegeben durch

$$v_h^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^\nu}{2h} \text{ für } x = \dfrac{\nu\pi}{h} & (\nu = 0, 1, \ldots, 2h-1), \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$v_h^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{1}{h} \text{ für } x = \dfrac{\pi}{2h} + \dfrac{2\pi\nu}{h} & (\nu = 0, 1, \ldots, h-1), \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Interpolationsstellen sind die im Intervall $0 \leqq x < 2\pi$ gelegenen rationalen Vielfachen von π.

e) *Interpolationsverfahren von J. Fischer-Hinnen.*

Dies Verfahren stimmt fast mit dem Brunsschen überein. Nur die Multiplikatoren $v_h^{(1)}$ sind anders definiert:

$$v_h^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{h} \text{ für } x = \dfrac{2\pi\nu}{h} & (\nu = 0, 1, \ldots, h-1), \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

§ 2. Die Lagrangesche Interpolationsformel und das allgemeine Interpolationsverfahren.

Die Lagrangesche Interpolationsformel ist nur auf den Fall A) (s. S. 18) anwendbar. Wir nehmen also in diesem Paragraphen an, daß $m+1$ Interpolationsstellen $t_0, t_1, \ldots, t_m$ gegeben sind. Das Folgende gilt für beliebige Grundfunktionen $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$ und für beliebige Multiplikatoren $v_0(x), v_1(x), \ldots, v_n(x)$ $(n \leqq m)$, wenn nur die Determinantenbedingungen (3) erfüllt sind.

Wir betrachten zunächst den Fall $n = m$. Wir gehen aus von der Formel (6) in § 1 des I. Teiles:

$$P_m(x) = \frac{-1}{D_m} \cdot \begin{vmatrix} (v_0 u_0) & \cdots & (v_0 u_m) & (v_0 f) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ (v_m u_0) & \cdots & (v_m u_m) & (v_m f) \\ u_0(x) & \cdots & u_m(x) & 0 \end{vmatrix}$$

In unserem Fall ist jede Klammer $(v_h u_k)$ von der Form

$$(v_h u_k) = \sum_{j=0}^{m} v_h(t_j) u_k(t_j).$$

Wir können daher die beiden in dem obigen Ausdruck für $P_m(x)$ auftretenden Determinanten nach dem Multiplikationssatz für Determinanten (Spaltenmultiplikation) zerlegen:

$$P_m(x) = -\frac{\begin{vmatrix} v_0(t_0) & \cdots & v_m(t_0) & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ v_0(t_m) & \cdots & v_m(t_m) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_0(t_0) & \cdots & u_m(t_0) & f(t_0) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ u_0(t_m) & \cdots & u_m(t_m) & f(t_m) \\ u_0(x) & \cdots & u_m(x) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_0(t_0) & \cdots & v_m(t_0) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ v_0(t_m) & \cdots & v_m(t_m) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_0(t_0) & \cdots & u_m(t_0) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ u_0(t_m) & \cdots & u_m(t_m) \end{vmatrix}}$$

Da nach Voraussetzung $D_m \neq 0$ ist, so ist auch jeder Faktor des Nenners für sich allein von Null verschieden. Man kann daher mit dem ersten Faktor kürzen und erhält

$$P_m(x) = -\frac{\begin{vmatrix} u_0(t_0) & \cdots & u_m(t_0) & f(t_0) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ u_0(t_m) & \cdots & u_m(t_m) & f(t_m) \\ u_0(x) & \cdots & u_m(x) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_0(t_0) & \cdots & u_m(t_0) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ u_0(t_m) & \cdots & u_m(t_m) \end{vmatrix}}.$$

Das ist die Lagrangesche Interpolationsformel für die Grundfunktionen

$$u_0(x), u_1(x), \ldots, u_m(x).$$

In der Tat, durch Entwicklung der Zählerdeterminante nach den Elementen der letzten Zeile erkennt man, daß

$$P_m(x) = A_0 u_0(x) + A_1 u_1(x) + \cdots + A_m u_m(x).$$

Weiter findet man durch einfache Umformung der Zählerdeterminante, daß

$$P_m(t_k) = f(t_k) \text{ für } k = 0, 1, \ldots, m.$$

Die Näherungsfunktion $P_m(x)$ ist in diesem Falle von der Wahl der Multiplikatoren $v_0(x), v_1(x), \ldots, v_m(x)$ völlig unabhängig, wie es von vornherein zu erwarten war.

Für den Rest dieses Paragraphen bezeichnen wir die Lagrangesche Interpolationsformel mit $J(x; t_0, t_1, \ldots, t_m)$. Unser Ergebnis lautet also:

Im Falle endlich vieler Interpolationsstellen $t_0, t_1, \ldots, t_m$ *ist*

$$P_m(x) = J(x; t_0, t_1, \ldots, t_m).$$

Wir gehen nun zum Fall $n < m$ über und bringen $P_n(x)$ in Zusammenhang mit der Lagrangeschen Interpolationsformel. Die beiden in Formel (6) auftretenden Determinanten lassen sich auch hier nach einem Satz der Determinantentheorie umformen. Das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} v_0(t_0) & \cdots & v_n(t_0) & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ v_0(t_m) & \cdots & v_n(t_m) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(t_0) & \cdots & u_n(t_0) & f(t_0) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ u_0(t_m) & \cdots & u_n(t_m) & f(t_m) \\ u_0(x) & \cdots & u_n(x) & 0 \end{pmatrix}$$

kann bekanntlich [18]) auf zwei verschiedene Weisen berechnet werden. Es ist einerseits (Spaltenkomposition) gleich

$$\begin{vmatrix} (v_0 u_0) & \cdots & (v_0 u_n) & (v_0 f) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ (v_n u_0) & \cdots & (v_n u_n) & (v_n f) \\ u_0(x) & \cdots & u_n(x) & 0 \end{vmatrix},$$

anderseits gleich

[18]) Vgl. z. B. O. Perron, Algebra 1, 2. Aufl. 1932, S. 113.

$$\sum \begin{vmatrix} v_0(t_{k_0}) \cdots v_n(t_{k_0}) & 0 \\ \cdots \cdots \cdots & \cdots \\ v_0(t_{k_m}) \cdots v_n(t_{k_m}) & 0 \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_0(t_{k_0}) \cdots u_n(t_{k_0}) & f(t_{k_0}) \\ \cdots \cdots \cdots & \cdots \\ u_0(t_{k_m}) \cdots u_n(t_{k_m}) & f(t_{k_m}) \\ u_0(x) \cdots u_n(x) & 0 \end{vmatrix}.$$

Dabei ist über alle Kombinationen $k_0, k_1, \ldots, k_n$ aus der Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, m$ zu summieren, wo $k_0 < k_1 < \cdots < k_n$.

Streicht man in den beiden Matrizen die letzte Zeile und die letzte Spalte, so ergibt sich nach demselben Satze

$$\begin{vmatrix} (v_0 u_0) \cdots (v_0 u_n) \\ \cdots \cdots \cdots \\ (v_n u_0) \cdots (v_n u_n) \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} v_0(t_{k_0}) \cdots v_n(t_{k_0}) \\ \cdots \cdots \cdots \\ v_0(t_{k_n}) \cdots v_n(t_{k_n}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_0(t_{k_0}) \cdots u_n(t_{k_0}) \\ \cdots \cdots \cdots \\ u_0(t_{k_n}) \cdots u_n(t_{k_n}) \end{vmatrix},$$

wobei die Summe in dem gleichen Sinne zu verstehen ist wie vorhin.

Jeder Kombination der Interpolationsstellen $t_{k_0}, t_{k_1}, \ldots, t_{k_n}$ entspricht aber eine Lagrangesche Interpolationsformel

$$(23) \qquad J(x; t_{k_0}, t_{k_1}, \ldots, t_{k_n}) = - \frac{\begin{vmatrix} u_0(t_{k_0}) \cdots u_n(t_{k_0}) f(t_{k_0}) \\ \cdots \cdots \cdots \\ u_0(t_{k_n}) \cdots u_n(t_{k_n}) f(t_{k_n}) \\ u_0(x) \cdots u_n(x) \quad 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_0(t_{k_0}) \cdots u_n(t_{k_0}) \\ \cdots \cdots \cdots \\ u_0(t_{k_n}) \cdots u_n(t_{k_n}) \end{vmatrix}}$$

Schreiben wir außerdem zur Abkürzung

$$(24) \qquad p(t_{k_0}, \ldots, t_{k_n}) = \begin{vmatrix} v_0(t_{k_0}) \cdots v_n(t_{k_0}) \\ \cdots \cdots \cdots \\ v_0(t_{k_n}) \cdots v_n(t_{k_n}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_0(t_{k_0}) \cdots u_n(t_{k_0}) \\ \cdots \cdots \cdots \\ u_0(t_{k_n}) \cdots u_n(t_{k_n}) \end{vmatrix},$$

so läßt sich die Näherungsfunktion $P_n(x)$ folgendermaßen darstellen[19]):

$$(25) \qquad P_n(x) = \frac{\sum p(t_{k_0}, \ldots, t_{k_n}) \; J(x; t_{k_0}, \ldots, t_{k_n})}{\sum p(t_{k_0}, \ldots, t_{k_n})}.$$

Beide Summen sind über alle Kombinationen $k_0 < k_1 < \cdots < k_n$ der Zahlen $0, 1, \ldots, m$ zu erstrecken.

Wenn also die Zahlen $p(t_{k_0}, \ldots, t_{k_n})$ alle positiv sind, dann ist $P_n(x)$ das arithmetische Mittel der Lagrangeschen Interpolationsfunktionen $J(x; t_{k_0}, \ldots, t_{k_n})$ mit den Gewichten $p(t_{k_0}, \ldots, t_{k_n})$.

Für die Methode der kleinsten Quadrate, bei welcher $v_h(x) = u_h(x)$ ist, sind die Gewichte stets positiv:

$$p(t_{k_0}, \ldots, t_{k_n}) = \begin{vmatrix} u_0(t_{k_0}) \cdots u_n(t_{k_0}) \\ \cdots \cdots \cdots \\ u_0(t_{k_n}) \cdots u_n(t_{k_n}) \end{vmatrix}^2$$

Als Beispiel betrachten wir polynomische Interpolation, d. h.

$$u_h = x^h \qquad (h = 0, 1, \ldots, n)$$

mit äquidistanten Interpolationsstellen. Letztere können wir in der folgenden Form annehmen:

$$t_k = k \qquad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

Speziell soll das Näherungspolynom $P_{m-1}(x)$ nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden.

[19]) Für die Methode der kleinsten Quadrate findet man diese Formel schon bei C. G. J. Jacobi, De formatione proprietatibus determinantium, Journal f. d. reine u. angew. Math. 22 (1841), S. 285.

Bezeichnen wir mit $J_k(x)$ das Lagrangesche Polynom $(m-1)$-ten Grades, welches an allen Stellen $x = 0, 1, \ldots, m$, ausgenommen $x = k$, mit der Funktion $f(x)$ übereinstimmt, so ist

$$P_{m-1}(x) = \frac{1}{\binom{2m}{m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 J_k(x).$$

In der Tat ist

$$p(k_0, \ldots, k_{m-1}) = \prod_{\lambda>\mu} (k_\lambda - k_\mu)^2 = \frac{(1!\,2! \ldots m!)^2}{k!\,(m-k)!} = \binom{m}{k}^2 (1!\,2! \ldots (m-1)!)^2.$$

Wir können also $\binom{m}{k}^2$ als Gewicht für J_k wählen. Die Summe der Gewichte ist

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{m}{m-k} = \binom{2m}{m}.$$

Speziell für $m = 4$ findet man

$$P_3(x) = \frac{1}{70} J_0(x) + \frac{16}{70} J_1(x) + \frac{36}{70} J_2(x) + \frac{16}{70} J_3(x) + \frac{1}{70} J_4(x).$$

Die Methode von A. Cauchy liefert für den gleichen Fall

$$P_3(x) = \frac{0}{70} J_0(x) + \frac{14}{70} J_1(x) + \frac{42}{70} J_2(x) + \frac{14}{70} J_3(x) + \frac{0}{70} J_4(x).$$

Übrigens kann die Formel (25) auch auf den Fall ausgedehnt werden, daß die Interpolationsstellen ein Intervall $a \leqq t \leqq b$ bilden. Man braucht statt der Summen nur $(n+1)$-fache Integrale zu setzen:

$$P_n(x) = \frac{\int \cdots \int p(t_0, \ldots, t_n)\, J(x; t_0, \ldots, t_n)\, dt_0\, dt_1 \ldots dt_n}{\int \cdots \int p(t_0, \ldots, t_n)\, dt_0 dt_1 \ldots dt_n}. \tag{26}$$

Die Funktionen $p(t_0, \ldots, t_n)$ und $J(x; t_0, \ldots, t_n)$ sind dieselben wie die in den Formeln (24) und (23) angegebenen, wenn man dort überall k_λ durch h ersetzt. Das Integrationsgebiet ist gegeben durch

$$a \leqq t_0 \leqq t_1 \leqq \cdots \leqq t_n \leqq b. \tag{27}$$

Der Beweis verläuft ähnlich, man hat nur folgenden Determinantensatz zu verwenden:

$$\begin{vmatrix} (v_0u_0) & \cdots & (v_0u_n) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (v_nu_0) & \cdots & (v_nu_n) \end{vmatrix} = \int \cdots \int \begin{vmatrix} v_0(t_0) & \cdots & v_n(t_0) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ v_0(t_n) & \cdots & v_n(t_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_0(t_0) & \cdots & u_n(t_0) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ u_0(t_n) & \cdots & u_n(t_n) \end{vmatrix} dt_0 \cdots dt_n. \tag{28}$$

über das Integrationsgebiet (27). Dieser Satz kann auf folgende Weise bewiesen werden*):

Der Integrand auf der rechten Seite von (28) ist

$$\sum_{(h_0,\ldots,h_n)} (-1)^H v_0(t_{h_0}) \cdots v_n(t_{h_n}) \cdot \sum_{(h_0,\ldots,h_n)} (-1)^H u_0(t_{h_0}) \cdots u_n(t_{h_n}).$$

Dabei ist über alle Permutationen $(h_0, \ldots, h_n)$ der Zahlen $0, 1, \ldots, n$ zu summieren. H ist 0 oder 1, je nachdem die zugehörige Permutation gerade oder ungerade ist. Dieser Ausdruck kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sum_{(h_0,\ldots,h_n)} \left\{ (-1)^H v_0(t_{h_0}) \cdots v_n(t_{h_n}) \cdot \sum_{(k_0,\ldots,k_n)} (-1)^{K+H} u_{k_0}(t_{h_0}) \cdots u_{k_n}(t_{h_n}) \right\}$$
$$= \sum_{(k_0,\ldots,k_n)} (-1)^K \left\{ \sum_{(h_0,\ldots,h_n)} v_0(t_{h_0}) u_{k_0}(t_{h_0}) \cdots v_n(t_{h_n}) u_{k_n}(t_{h_n}) \right\},$$

wobei $K = 0$ oder 1, je nachdem die Permutation $(k_0, \ldots, k_n)$ gerade oder ungerade ist.

*) Dieser Satz mit Beweis bei G. Landsberg, Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen, Math. Ann. **69** (1910), S. 231.

Wir berechnen zunächst

$$\sum_{(h_0,\ldots,h_n)} \int \cdots \int v_0(t_{h_0}) u_{k_0}(t_{h_0}) \cdots v_n(t_{h_n}) u_{k_n}(t_{h_n})\, dt_{h_0} \cdots dt_{h_n}. \tag{29}$$

Das $(n+1)$-fache Integral ist über

$$a \leqq t_{h_0} \leqq t_{h_1} \leqq \cdots \leqq t_{h_n} \leqq b \tag{30}$$

zu erstrecken. Durchläuft $(h_0, \ldots, h_n)$ alle Permutationen der Zahlen $0, 1, \ldots, n$, so bilden die Integrationsgebiete (30) zusammen den $(n+1)$-dimensionalen Würfel

$$a \leqq t_r \leqq b \qquad (r = 0, 1, \ldots, n).$$

Jeder Punkt $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ dieses Würfels liegt nämlich, falls seine sämtlichen Koordinaten voneinander verschieden sind, in genau einem Integrationsgebiet (30). Man braucht, um dies einzusehen, nur die Koordinaten nach der Größe zu ordnen:

$$a \leqq t_{h_0} < t_{h_1} < \cdots < t_{h_n} \leqq b.$$

Wenn nicht alle Koordinaten verschieden sind, so gehört der Punkt dem Rand mehrerer Integrationsgebiete (30) an.

Folglich ist (29) identisch mit

$$\int_a^b \cdots \int_a^b v_0(t_0) u_{k_0}(t_0) \cdots v_n(t_n) u_{k_n}(t_n)\, dt_0 \cdots dt_n = (v_0 u_{k_0}) \cdots (v_n u_{k_n}).$$

Also ist die rechte Seite der zu beweisenden Formel (28) gleich

$$\sum_{(k_0,\ldots,k_n)} (-1)^E (v_0 u_{k_0}) \cdots (v_n u_{k_n}) = \begin{vmatrix} (v_0 u_0) & \cdots & (v_0 u_n) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (v_n u_0) & \cdots & (v_n u_n) \end{vmatrix}, \text{ w. z. b. w.}$$

Mit Hilfe dieses Satzes ergibt sich die Richtigkeit der Formel (26).

Wenn man die Veränderlichen $t_0, t_1, \ldots, t_n$ unabhängig voneinander das Intervall (a, b) durchlaufen läßt, dann muß man in Formel (28) die rechte Seite in der folgenden Weise abändern:

$$\frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \cdots \int_a^b |\cdots|\cdot|\cdots|\, dt_0 \cdots dt_n.$$

Entsprechend kann man auch die Formel (26) abändern. Da aber hier sowohl im Zähler wie im Nenner der Faktor $\frac{1}{(n+1)!}$ auftritt, bleibt die Formel äußerlich ungeändert, nur das Integrationsgebiet heißt jetzt

$$a \leqq t_h \leqq b \qquad (h = 0, 1, \ldots, n).$$

§ 3. Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Wir beschränken uns bei der folgenden Darstellung auf den Fall B). Die Interpolationsstellen füllen also das ganze Intervall $a \leqq t \leqq b$ aus. Die Integrale sollen in diesem Paragraphen im Lebesgueschen Sinne verstanden werden.

Allgemeiner als in § 1 kann die Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate durch folgende Wahl der Multiplikatoren gekennzeichnet werden:

$$v_h(x) = p(x)\, u_h(x),$$

wobei die Gewichtsfunktion $p(x)$ im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ positiv sein und höchstens auf einer Menge vom Mass Null verschwinden soll.

Um die Voraussetzung (3) zu erfüllen, brauchen wir nur anzunehmen, daß die Grundfunktionen $u_0(x), u_1(x), \ldots$ linear unabhängig sind. Denn die Determinante D_n ist jetzt die Gramsche Determinante der linear unabhängigen Funktionen

$$\sqrt{p(x)}\,u_0(x), \ldots, \sqrt{p(x)}\,u_n(x),$$

sie ist also positiv.

Wir wählen die Normierungskonstanten wie auf Seite 23:

$$p_h = q_h = \sqrt{\frac{D_{h-1}}{D_h}} \quad \text{für} \quad h = 1, 2, \ldots, \qquad p_0 = q_0 = \sqrt{\frac{1}{D_0}}.$$

Weiter ist

$$(v_h u_h) = (v_h u_h) = \int_a^b p(t)\, u_h(t)\, u_h(t)\, dt,$$

also gemäß (10) und (11)

$$\chi_n(x) = p(x)\,\varphi_n(x).$$

Infolgedessen lautet der Kern (17)

$$K_n(t, x) = p(t) \sum_{h=0}^{n} \varphi_h(t)\,\varphi_h(x).$$

An die Stelle der Biorthogonalitätsbeziehungen (15) treten jetzt die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_a^b p(t)\,\varphi_h(t)\,\varphi_k(t)\,dt = \begin{cases} 1, & \text{falls } h = k \\ 0, & \text{falls } h \neq k. \end{cases} \tag{31}$$

Als spezielle Beispiele führen wir an:

Grundfunktionen $u_h = x^h$, Interpolationsstellen $-1 \leqq t \leqq 1$:

a) $p(x) = 1$.

$\varphi_n(x)$ ist das Legendresche Polynom

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

b) $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Man erhält die Tschebyscheffschen Polynome erster Art

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \cos n\vartheta \\ x &= \cos\vartheta \end{aligned}\right\} 0 \leqq \vartheta \leqq \pi.$$

c) $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Es ergeben sich die Tschebyscheffschen Polynome zweiter Art

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} \\ x &= \cos\vartheta \end{aligned}\right\} 0 \leqq \vartheta \leqq \pi.$$

Bekanntlich läßt sich bei der Methode der kleinsten Quadrate die zu einer Funktion $f(x)$ gehörige Interpolationsfunktion $P_n(x)$ unter allen Funktionen von der Form

$$Q_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \tag{32}$$

durch gewisse Minimalbedingungen auszeichnen und zwar auf zwei verschiedene Weisen. Wir wollen dies hier nachweisen. Anstatt aber unter den Funktionen (32) diejenige mit gewissen Minimaleigenschaften zu suchen, lösen wir dieselbe Aufgabe für Kerne von der Form

$$H_n(t, x) = p(t) \sum_{h=0}^{n} \psi_h(t)\,\varphi_h(x), \tag{33}$$

wobei $\psi_h(t)$ beliebige (integrierbare) Funktionen bedeuten.

Die beiden Aufgaben sind gleichbedeutend; denn multipliziert man einen Kern (33) mit $f(t)$ und integriert über $a \leqq t \leqq b$, so erhält man einen Ausdruck von der Gestalt (32) und umgekehrt kann man zu jeder Funktion (32) einen Kern (33) angeben, so daß

$$c_h = \int_a^b p(t)\,\psi_h(t)\,f(t)dt.$$

Da nämlich $f(x)$ nicht identisch verschwindet, so gibt es sicher Funktionen $g_h(x)$, für welche

$$\int_a^b p(t)g_h(t)f(t)dt = b_h \neq 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, n).$$

Dann setze man

$$\psi_h(x) = \frac{c_h}{b_h} g_h(x).$$

Zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen schreiben wir

$$\psi_h(x) = \varphi_h(x) + w_h(x).$$

Außerdem führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\int_a^b p(t)w_h(t)\varphi_k(t)dt = a_{hk}, \tag{34}$$

$$\int_a^b p(t)\varphi_k(t)f(t)dt = c_k. \tag{35}$$

Erste Minimumaufgabe. *Unter allen Kernen von der Form*

$$H_n(t, x) = p(t) \sum_{h=0}^{n} [\varphi_h(t) + w_h(t)]\,\varphi_h(x), \tag{36}$$

sind diejenigen zu bestimmen, welche die Eigenschaft haben, daß für jede samt ihrem Quadrat integrierbare Funktion $f(x)$ die Zahl

$$m = \int_a^b [f(t) - Q_n(t)]^2 p(t)dt \tag{37}$$

ein Minimum wird. Dabei ist

$$Q_n(x) = \int_a^b f(t)H_n(t, x)dt.$$

Die Lösung findet man durch Umformung des Ausdrucks (37): Mit (36) und (35) ergibt sich

$$Q_n(x) = \sum_{h=0}^{n} c_h \varphi_h(x) + \sum_{h=0}^{n} \varphi_h(x) \int_a^b p w_h f dt.$$

Setzt man dies in (37) ein, so erhält man mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehungen (31)

$$m = \int_a^b p\, f^2 dt - \sum_{h=0}^{n} c_h^2 + \sum_{h=0}^{n} \left(\int_a^b p w_h f dt\right)^2.$$

Dieser Ausdruck wird dann und nur dann am kleinsten, wenn

$$\int_a^b p w_h f dt = 0$$

für $h = 0, 1, \ldots, n$ und für jede integrierbare Funktion $f(x)$.

Das ist aber nur möglich, wenn bis auf eine Nullmenge

$$w_h(x) = 0 \quad \text{für } h = 0, 1, \ldots, n.$$

Die zweite Minimumaufgabe verlangt eine Einschränkung für die Grundfunktionen: Das Orthogonalsystem

$$\sqrt{p(x)}\,\varphi_0(x), \sqrt{p(x)}\,\varphi_1(x), \ldots$$

muß *vollständig* sein; d. h. es soll jede Funktion, die zu allen Funktionen dieses Systems orthogonal ist, identisch Null sein, höchstens von einer Nullmenge abgesehen. Unter dieser Voraussetzung gilt bekanntlich die im folgenden zu verwendende Parsevalsche Gleichung[2e]).

[2]) Siehe z. B.: E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik 1, 3 (1929), S. 1270.

Zweite Minimumaufgabe. *Unter allen Kernen von der Form* (36) *sind diejenigen zu bestimmen, für welche die Funktion*

$$M(x) = \int_a^b \frac{1}{p(t)} H_n^2(t, x)dt$$

in jedem Punkt des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ *den kleinsten Wert annimmt und welche außerdem folgende Nebenbedingungen erfüllen:*

$$\int_a^b \varphi_r(t)H_n(t, x)dt = \varphi_r(x) \quad \text{für } r = 0, 1, \ldots, n. \tag{38}$$

Setzt man den Kern (36) in die Nebenbedingung (38) ein, so erhält man unter Verwendung der Abkürzung (34)

$$\int_a^b pw_h \varphi_r dt = a_{hr} = 0 \quad \text{für } h, r = 0, 1, \ldots, n. \tag{39}$$

Das Integral $M(x)$ führt demnach zu

$$M(x) = \sum_{h=0}^{n} \varphi_h(x)^2 + \sum_{j,h=0}^{n} \varphi_j(x)\,\varphi_h(x) \int_a^b pw_j w_h dt. \tag{40}$$

Die letzteren Integrale berechnen wir mit der Parsevalschen Gleichung für die Funktionen $\sqrt{p(x)}\, w_j(x)$ und $\sqrt{p(x)}\, w_h(x)$ in bezug auf das Orthogonalsystem

$$\sqrt{p(x)}\varphi_0(x), \quad \sqrt{p(x)}\varphi_1(x), \ldots.$$

Wir finden

$$\int_a^b pw_j w_h dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}a_{hk} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{jk}a_{hk} \quad \text{für } j, h = 0, 1, \ldots, n.$$

Dabei ist (39) benutzt worden.

Nunmehr erhält (40) die folgende Gestalt

$$M(x) = \sum_{h=0}^{n} \varphi_h(x)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\sum_{h=0}^{n} a_{hk}\varphi_h(x)\right]^2.$$

Dieser Ausdruck ist dann und nur dann für jedes x des Intervalles $a \leqq x \leqq b$ ein Minimum, wenn

$$\sum_{h=0}^{n} a_{hk}\varphi_h(x) = 0 \quad \text{für } k = n+1, n+2, \ldots.$$

Da aber die $\varphi_h(x)$ linear unabhängig sind, so folgt

$$a_{hk} = 0 \text{ für } k = n+1, n+2, \ldots \text{ und } h = 0, 1, \ldots, n. \tag{41}$$

(39) und (41) ergeben zusammen wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit

$$w_h(x) = 0 \text{ für } h = 0, 1, \ldots, n.$$

Ausgenommen ist höchstens eine Menge vom Maß Null.

Die Lösung des zweiten Minimumproblems lautet also genau wie die des ersten:

Die gesuchten Kerne unterscheiden sich höchstens auf einer Nullmenge von dem Kern

$$K_n(t, x) = p(t) \sum_{h=0}^{n} \varphi_h(t)\ \varphi_h(x).$$

§ 4. Die Interpolationsmethode von A. Cauchy.

Das Cauchysche Verfahren ist ebenso allgemein anwendbar wie die Methode der kleinsten Quadrate, also für jede Folge von Grundfunktionen und sowohl für endlich viele Interpolationsstellen wie auch für den Fall, daß die Interpolationsstellen ein ganzes Intervall ausfüllen.

145

Dieses Verfahren ist durch die folgende Wahl der Multiplikatoren gekennzeichnet (siehe § 1, b):

$$v_h = \operatorname{sg}(\varphi_h).$$

Die Multiplikatoren haben also nur die Werte ± 1 oder 0. Infolgedessen ist die Aufstellung der Normalgleichungen hier viel einfacher als bei der Methode der kleinsten Quadrate.

Daß diese Wahl der Multiplikatoren überhaupt möglich ist, hängt daran, daß zur Berechnung von φ_n nur die Multiplikatoren $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ gebraucht werden, nicht aber v_n. Außerdem ist $v_0 = \operatorname{sg}(\varphi_0) = \operatorname{sg}(u_0)$.

Wir wollen hier für folgendes Beispiel einige Funktionen des Biorthogonalsystems wirklich aufstellen:

Als Grundfunktionen wählen wir $u_h = x^h$ und als Interpolationsstellen die Punkte des Intervalls $-1 \leqq t \leqq 1$. Die Funktionen φ_n werden hier gewöhnliche Polynome

$$\varphi_n = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} + x^n,$$

wobei wir so normieren, daß der Koeffizient von x^n gleich 1 wird.

Zunächst ist $\varphi_0 = 1$ und daher $v_0 = 1$. Für $n \geqq 1$ kann φ_n aus den folgenden Beziehungen bestimmt werden (siehe (9)):

$$\int_{-1}^{+1} \operatorname{sg}(\varphi_h)\, \varphi_n dx = 0 \qquad \text{für } h < n. \tag{42}$$

Einige allgemeine Eigenschaften der Polynome φ_n lassen sich leicht aus den Bedingungen (42) ablesen:

a) $$\varphi_n(-x) = (-1)^n \varphi_n(x),$$

d. h. die Polynome gerader Ordnung sind gerade Funktionen, sie enthalten also nur gerade Potenzen von x, und die Polynome ungerader Ordnung sind ungerade Funktionen, sie enthalten also nur ungerade Potenzen von x.

Beweis. Vollständige Induktion. Die Behauptung ist richtig für $n = 0$. Ist sie für $h < n$ richtig, dann ist

$$v_h(-x) = \operatorname{sg} \varphi_h(-x) = \operatorname{sg}(-1)^h \varphi_h(x) = (-1)^h v_h(x).$$

Beachtet man, daß demnach

$$\int_{-1}^{+1} v_h(x)\, \varphi_n(x) dx = \int_{-1}^{+1} v_h(-x) \varphi_n(-x) dx = (-1)^h \int_{-1}^{+1} v_h(x) \varphi_n(-x) dx,$$

so folgt

$$\int_{-1}^{+1} v_h(x) \varphi_n(-x) dx = 0 \quad \text{für } h < n.$$

Das sind gerade die Bedingungen (42), durch die $\varphi_n(x)$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist, also ist

$$\varphi_n(-x) = c\, \varphi_n(x)$$

und durch Vergleich der Potenzen x^n ergibt sich

$$(-1)^n = c.$$

Wegen dieser Eigenschaft können also die Polynome gerader Ordnung für sich allein berechnet werden, ebenso die Polynome ungerader Ordnung.

Die Bedingungen (42) vereinfachen scich dann zu

$$\int_0^1 v_{2h} \varphi_{2n} dx = 0 \ (h < n) \text{ für die Polynome gerader Ordnung,}$$

$$\int_0^1 v_{2h+1} \varphi_{2n+1} dx = 0 \ (h < n) \text{ für die Polynome ungerader Ordnung.}$$

Die Polynome ungerader Ordnung lassen sich leicht aus denen gerader Ordnung herleiten, nämlich auf Grund der folgenden Rekursionsformel:

b) $$\varphi_{2n+1}(x) = \frac{x}{2^n}\,\varphi_n(2x^2-1).$$

Beweis. Wir führen in den Bedingungen (42) die folgende Substitution aus:

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{2}},$$

wobei unter der Wurzel der postive Wert verstanden werden soll. Dann erhält man $x = 2y^2 - 1$, folglich ist

(43) $$\int_{-1}^{+1} \mathrm{sg}\,[\varphi_h(x)]\;\varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \mathrm{sg}[\varphi_h(2y^2-1)]\,\varphi_n(2y^2-1)4y\,dy = 0 \text{ für } h < n.$$

Die Polynome $p_{2n+1}(x) = \frac{x}{2^n}\,\varphi_n(2x^2-1)$ haben folgende Eigenschaften:

$$p_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + \cdots,$$
$$p_{2n+1}(-x) = -p_{2n+1}(x),$$
$$\mathrm{sg}\;p_{2n+1}(x) = \mathrm{sg}\;\varphi_n(2x^2-1) \text{ für } 0 < x \leqq 1.$$

In Verbindung mit (43) gilt somit:

$$\int_0^1 \mathrm{sg}\;[p_{2h+1}(x)]\;p_{2n+1}(x)\,dx = 0 \quad \text{für } h < n.$$

Wie am Schluß des Beweises von a) folgt daraus

$$p_{2n+1}(x) = \varphi_{2n+1}(x), \text{ w. z. b. w.}$$

Aus jedem Polynom gerader Ordnung lassen sich mit Hilfe dieser Formel unendlich viele Polynome ungerader Ordnung herleiten. Man übersieht das besser, wenn man $x = \cos\vartheta$ setzt. Dann ist nämlich $2x^2 - 1 = \cos 2\vartheta$ und die Rekursionsformel nimmt die folgende Gestalt an:

$$\varphi_{2n+1}(\cos\vartheta) = \frac{\cos\vartheta}{2^n}\;\varphi_n(\cos 2\vartheta) = \frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{\sin 2\vartheta}{\sin\vartheta}\;\varphi_n(\cos 2\vartheta).$$

Für den Fall $n = 0$ ergibt sich so

$$\varphi_0 = 1,$$
$$\varphi_1(\cos\vartheta) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\vartheta}{\sin\vartheta},$$
$$\varphi_2(\cos\vartheta) = \frac{1}{2^2}\,\frac{\sin 2\vartheta}{\sin\vartheta}\;\varphi_1(\cos 2\vartheta) = \frac{1}{2^3}\,\frac{\sin 4\vartheta}{\sin\vartheta},$$

und durch vollständige Induktion findet man leicht

$$\varphi_{2^\nu-1}(\cos\vartheta) = \frac{1}{2^{2^\nu}-1}\,\frac{\sin 2^\nu\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Ebenso ist allgemeiner für irgendein n

$$\varphi_{2^\nu n - 2^\nu + 1}(\cos\vartheta) = \frac{1}{2^{(2^\nu-1)(n+1)}}\,\frac{\sin(2^\nu\vartheta)}{\sin\vartheta}\;\varphi_n(\cos 2^\nu\vartheta).$$

Es sind also nur noch die Polynome gerader Ordnung zu berechnen. Das ist eine ziemlich umständliche Rechnung, da zur Berechnung von φ_n die Nullstellen der vorangehenden Polynome bestimmt werden müssen. Die ersten Polynome lassen sich trotzdem rasch finden, wenn man an Stelle von φ_n ihre Integrale

$$\Phi_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt$$

sucht. Sie haben folgende Eigenschaften:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + \cdots,$$

$$\Phi_n(-x) = (-1)^{n+1}\Phi_n(x), \tag{44}$$

$$\Phi_n(0) = 0.$$

Wir brauchen aber nur die Φ_n mit geradem Index zu berechnen. Es ist also Φ_{2n} das Produkt aus $\frac{x}{2n+1}$ und einer geraden Funktion.

Aus $v_0 = 1$ folgt weiter

$$\int_{-1}^{+1} v_0 \varphi_{2n}\,dx = 2\Phi_{2n}(1) = 0 \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots,$$

d. h. $\Phi_2, \Phi_4, \ldots$ haben die Nullstellen ± 1. Insbesondere ist also nach (44)

$$\Phi_2 = \frac{x}{3}(x^2 - 1),$$

mithin

$$\varphi_2 = x^2 - \tfrac{1}{3}.$$

Es ergibt sich weiter

$$\int_{-1}^{+1} v_2 \varphi_{2n}\,dx = 2\Phi_{2n}(1) - 4\Phi_{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -4\Phi_{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \quad \text{für } n = 2, 3, \ldots,$$

d. h. es besitzt Φ_{2n} für $n = 2, 3, \ldots$ sicher den Faktor

$$\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Insbesondere ist unter Verwendung des vorangehenden Ergebnisses

$$\Phi_4 = \frac{x}{5}(x^2 - 1)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right),$$

also

$$\varphi_4 = x^4 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{15}.$$

Die Berechnung der folgenden Polynome ist aber schon beträchtlich umständlicher. Man findet z. B.

$$\Phi_6 = \frac{x}{7}(x^2 - 1)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{144 - 25\sqrt{15}}{105}\right),$$

$$\varphi_6 = x^6 - \frac{284 - 25\sqrt{15}}{147}x^4 + \frac{681 - 100\sqrt{15}}{735}x^2 - \frac{144 - 25\sqrt{15}}{2205}$$

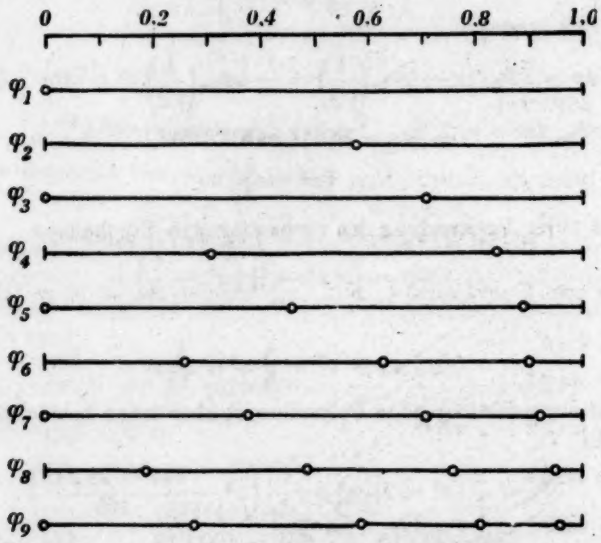
In der folgenden Tafel sind die ersten 10 Polynome zusammengestellt:

$$\varphi_0 = 1$$
$$\varphi_1 = x$$
$$\varphi_2 = x^2 - 0{,}3333333$$
$$\varphi_3 = x^3 - 0{,}5x$$
$$\varphi_4 = x^4 - 0{,}8x^2 + 0{,}0666667$$
$$\varphi_5 = x^5 - x^3 + 0{,}1666667x$$
$$\varphi_6 = x^6 - 1{,}2733022x^4 + 0{,}3995941x^2 - 0{,}0213947$$
$$\varphi_7 = x^7 - 1{,}5x^5 + 0{,}625x^3 - 0{,}0625x$$
$$\varphi_8 = x^8 - 1{,}7617104x^6 + 0{,}9452660x^4 - 0{,}1594574x^2 + 0{,}0046611$$
$$\varphi_9 = x^9 - 2x^7 + 1{,}3x^5 - 0{,}3x^3 + 0{,}0166667x$$

Die Nullstellen dieser zehn Polynome sind alle reell und liegen zwischen -1 und $+1$. Die Nullstellen zweier aufeinanderfolgender dieser zehn Polynome trennen sich. Sie sind in folgender Tabelle angegeben:

φ_0	—			
φ_1	0			
φ_2	$\pm$ 0,5773503			
φ_3	0	$\pm$ 0,7071068		
φ_4	$\pm$ 0,3074003	$\pm$ 0,8399435		
φ_5	0	$\pm$ 0,4597008	$\pm$ 0,8880738	
φ_6	$\pm$ 0,2591387	$\pm$ 0,6250632	$\pm$ 0,9030201	
φ_7	0	$\pm$ 0,3826834	$\pm$ 0,7071168	$\pm$ 0,9238795
φ_8	$\pm$ 0,1914881	$\pm$ 0,4943354	$\pm$ 0,7571374	$\pm$ 0,9525850
φ_9	0	$\pm$ 0,2828927	$\pm$ 0,5884725	$\pm$ 0,8085173 }
				$\pm$ 0,9591516 }

Die nachstehende Figur zeigt die Verteilung dieser Nullstellen im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$; die Verhältnisse im Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$ ergeben sich daraus durch Spiegelung am Nullpunkt.



Es ist zu vermuten, daß diese Eigenschaften der Nullstellen allgemein gelten.

Von den Funktionen $\chi_n(x)$, die zu den Polynomen $\varphi_n(x)$ im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ biorthogonal sind, lauten die ersten acht folgendermaßen:

$$\chi_0 = 1 \cdot 0{,}5 \operatorname{sg} \varphi_0$$
$$\chi_1 = 2 \cdot 0{,}5 \operatorname{sg} \varphi_1$$
$$\chi_2 = 4 \cdot 0{,}4871393 \,(\operatorname{sg} \varphi_2 + 0{,}1547005 \operatorname{sg} \varphi_0)$$
$$\chi_3 = 8 \cdot 0{,}5 \operatorname{sg} \varphi_3$$
$$\chi_4 = 16 \cdot 0{,}4927737 \,(\operatorname{sg} \varphi_4 + 0{,}0805233 \operatorname{sg} \varphi_2 + 0{,}0775433 \operatorname{sg} \varphi_0)$$
$$\chi_5 = 32 \cdot 0{,}4871393 \,(\operatorname{sg} \varphi_5 + 0{,}1547005 \operatorname{sg} \varphi_1)$$
$$\chi_6 = 64 \cdot 0{,}4945631 \,(\operatorname{sg} \varphi_6 + 0{,}0368863 \operatorname{sg} \varphi_4 - 0{,}0685934 \operatorname{sg} \varphi_2 + 0{,}0659805 \operatorname{sg} \varphi_0)$$
$$\chi_7 = 128 \cdot 0{,}5 \operatorname{sg} \varphi_7$$

Alle χ-Funktionen sind abteilungsweise konstant und haben sicher so viele Zeichenwechsel wie ihr Index angibt. Das ist eine Folge der Biorthogonalitätsbeziehungen

$$\int_{-1}^{+1} \chi_h \varphi_k dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } h \neq k \\ 1, & \text{falls } h = k. \end{cases}$$

Da x^n als Linearkombination von $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ geschrieben werden kann, so gilt auch

$$\int_{-1}^{+1} x^n \chi_h \, dx = 0 \quad \text{für } n < h,$$

und daraus ergibt sich die Behauptung nach bekannten Schlüssen.

Nach dieser Zusammenstellung der ersten acht χ-Funktionen scheint es so zu sein, daß die Zeichenwechsel von χ_n mit den Zeichenwechseln von $\operatorname{sg}\varphi_n$, also auch mit denen von φ_n übereinstimmen. Daraus würde dann sofort folgen, daß die Nullstellen von φ_n alle reell und einfach sind und zwischen -1 und $+1$ liegen.

Als zweites Beispiel für die Cauchysche Methode sei das folgende gewählt:

Grundfunktionen: $u_n = \sin(n+1)\vartheta$,
Interpolationsstellen: $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$.

Das Biorthogonalsystem $\bar{\chi}_n(\vartheta)$, $\bar{\varphi}_n(\vartheta)$ kann leicht aus dem des vorangehenden Beispiels hergeleitet werden. Es gilt nämlich

$$\bar{\varphi}_n(\vartheta) = 2^n \sin\vartheta \varphi_n(\cos\vartheta),$$

$$\bar{\chi}_n(\vartheta) = \frac{1}{2_n}\chi_n(\cos\vartheta).$$

In der Tat ist zunächst

$$\operatorname{sg}\bar{\varphi}_n(\vartheta) = \operatorname{sg}\varphi_n(\cos\vartheta) \quad \text{für } 0 < \vartheta < \pi,$$

und außerdem führt die Substitution $x = \cos\vartheta$ zu

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sg}[\bar{\varphi}_h(\vartheta)]\, \bar{\varphi}_n(\vartheta)\, d\vartheta = 2^n \int_{-1}^{+1} \operatorname{sg}[\varphi_h(x)]\, \varphi_n(x) dx.$$

Die ersten acht Funktionen $\bar{\varphi}_n$ sind im folgenden zusammengestellt:

$$\bar{\varphi}_0 = \sin\vartheta$$

$$\bar{\varphi}_1 = \sin 2\vartheta$$

$$\bar{\varphi}_2 = \sin 3\vartheta - \frac{1}{3}\sin\vartheta$$

$$\bar{\varphi}_3 = \sin 4\vartheta$$

$$\bar{\varphi}_4 = \sin 5\vartheta - \frac{1}{5}\sin 3\vartheta - \frac{2}{15}\sin\vartheta$$

$$\bar{\varphi}_5 = \sin 6\vartheta - \frac{1}{3}\sin 2\vartheta$$

$$\bar{\varphi}_6 = \sin 7\vartheta - \frac{401 - 100\sqrt{15}}{147}\sin 5\vartheta + \frac{471 - 100\sqrt{15}}{735}\sin 3\vartheta - \frac{200\sqrt{15} - 417}{2205}\sin\vartheta$$

$$\bar{\varphi}_7 = \sin 8\vartheta.$$

Für die entsprechenden $\bar{\chi}_n$ Funktionen verweisen wir auf die Tafel der χ_n im vorangehenden Beispiel. Wir brauchen dort nur $\bar{\varphi}_n$ statt φ_n zu lesen und die Faktoren 2^n auf der rechten Seite wegzulassen.

Die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Nullstellen der ersten zehn trigonometrischen Polynome $\bar{\varphi}_n$ sind in der folgenden Tafel enthalten; zum Vergleiche sind dabei auch die Nullstellen von $\sin(n+1)\vartheta$ angegeben. Die immer vorhandene Nullstelle 0 ist nicht mit aufgeführt.

Nullstellen (im Gradmaß) von

	$\bar{\varphi}_n(\vartheta)$			$\sin(n+1)\vartheta$		
	°	′	″	°	′	″
$\bar{\varphi}_1$	90	0	0	90	0	0
$\bar{\varphi}_2$	54	44	8	60	0	0
$\bar{\varphi}_3$	45	0	0	45	0	0
	90	0	0	90	0	0
$\bar{\varphi}_4$	32	51	57	36	0	0
	72	5	51	72	0	0
$\bar{\varphi}_5$	27	22	4	30	0	0
	62	37	56	60	0	0
	90	0	0	90	0	0
$\bar{\varphi}_6$	25	26	31	25	42	51
	51	18	47	51	25	43
	74	58	52	77	8	34
$\bar{\varphi}_7$	22	30	0	22	30	0
	45	0	0	45	0	0
	67	30	0	67	30	0
	90	0	0	90	0	0
$\bar{\varphi}_8$	17	42	52	20	0	0
	40	47	15	40	0	0
	60	22	27	60	0	0
	78	57	37	80	0	0
$\bar{\varphi}_9$	16	25	58	18	0	0
	36	2	55	36	0	0
	52	57	5	54	0	0
	73	34	2	72	0	0
	90	0	0	90	0	0

Schließlich wollen wir noch ein drittes Beispiel zur Cauchyschen Methode geben:

Grundfunktionen: $u_n = \cos(n+1)\vartheta$,

Interpolationsstellen: $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$.

Die Funktionen $\bar{\bar{\varphi}}_n(\vartheta)$ haben die Gestalt

$$\bar{\bar{\varphi}}_n = \cos(n+1)\vartheta + c_1 \cos n\vartheta + \cdots + c_n \cos\vartheta.$$

Ähnlich wie im ersten Beispiel lassen sich folgende Eigenschaften beweisen:

1) $$\bar{\bar{\varphi}}_n(\pi - \vartheta) = (-1)^{n+1}\bar{\bar{\varphi}}_n(\vartheta);$$

2) die Bedingungen, aus denen $\bar{\bar{\varphi}}_n$ berechnet werden kann, lauten daher für die Funktionen mit geradem Index

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sg}(\bar{\bar{\varphi}}_{2h})\,\bar{\bar{\varphi}}_{2n}\,d\vartheta = 0 \quad \text{für} \quad h < n;$$

3) daraus ergibt sich

$$\bar{\bar{\varphi}}_{2n+1}(\vartheta) = \bar{\bar{\varphi}}_n(2\vartheta)$$

als Rekursionsformel zur Berechnung der Funktionen mit ungeradem Index.

Auf Grund dieser Eigenschaften können die Funktionen $\bar{\bar{\varphi}}_{2n}$ leicht aus den Funktionen $\bar{\varphi}_{2n}$ des vorhergehenden Beispiels bestimmt werden, für die übrigens ähnliche Beziehungen gelten. Es ist

$$\bar{\bar{\varphi}}_{2n}(\vartheta) = \cos(2n+1)\vartheta + c_1 \cos(2n+1)\vartheta + c_2 \cos(2n-3)\vartheta + \cdots$$

und in Verbindung mit der Eigenschaft 2) folgt

$$\bar{\varphi}_{2n}(\vartheta) = (-1)^n \bar{\varphi}_{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right).$$

Die Funktionen mit ungeradem Index ergeben sich daraus nach 3). Also ist

$$\bar{\varphi}_0 = \cos\vartheta$$
$$\bar{\varphi}_1 = \cos 2\vartheta$$
$$\bar{\varphi}_2 = \cos 3\vartheta + \frac{1}{3}\cos\vartheta$$
$$\bar{\varphi}_3 = \cos 4\vartheta$$
$$\bar{\varphi}_4 = \cos 5\vartheta + \frac{1}{5}\cos 3\vartheta - \frac{2}{15}\cos\vartheta$$
$$\bar{\varphi}_5 = \cos 6\vartheta + \frac{1}{3}\cos 2\vartheta$$
$$\bar{\varphi}_6 = \cos 7\vartheta + \frac{401-100\sqrt{15}}{147}\cos 5\vartheta + \frac{471-100\sqrt{15}}{735}\cos 3\vartheta + \frac{200\sqrt{15}-417}{2205}\cos\vartheta$$
$$\bar{\varphi}_7 = \cos 8\vartheta$$

Die Funktionen $\bar{\chi}_n$ und die Nullstellen können auch ohne weiteres übertragen werden.

§ 5. Ein Interpolationsverfahren von P. L. Tschebyscheff.

In der Abhandlung [4]) beschreibt Tschebyscheff zwei Interpolationsmethoden, die im Falle einer großen Anzahl von Interpolationsstellen einfacher zu handhaben sind als die Methode der kleinsten Quadrate. Während das erste dieser beiden Verfahren noch vom Grade des Näherungspolynoms abhängt, ist das zweite davon unabhängig. Unsere Betrachtungen beziehen sich nur auf das zweite Tschebyscheffsche Verfahren. Tschebyscheff hat sein Verfahren für Annäherung durch *gewöhnliche* Polynome entwickelt. H. Bruns [11]) hat wohl zuerst hervorgehoben, daß dieses Verfahren besser für *trigonometrische* Polynome geeignet ist.

Es ist bequemer, das Tschebyscheffsche Verfahren in zwei Fälle aufzuspalten, nämlich in Annäherung durch cos-Polynome und Annäherung durch sin-Polynome, entsprechend der Zerlegung einer Funktion $f(x)$ in die Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

In diesem und in den folgenden Paragraphen soll deshalb $f_1(x)$ eine gegebene gerade, $f_2(x)$ eine gegebene ungerade Funktion bezeichnen und zwar mit der Periode 2π, d. h. es gelten folgende Voraussetzungen:

$$f_1(x + 2\pi) = f_1(x) \text{ bzw. } f_2(x + 2\pi) = f_2(x)$$
$$f_1(-x) = f_1(x) \text{ bzw. } f_2(-x) = -f_2(x).$$

Außerdem sollen beide Funktionen im Riemannschen Sinne integrierbar sein und stets so normiert sein, daß der Fourierkoeffizient a_0 verschwindet, d. h. daß

$$\int_0^{\pi} f_1(x)dx = 0.$$

Die zu bestimmenden Näherungsfunktionen schreiben wir in der Gestalt

$$(45) \qquad \begin{aligned} P_1^{(n)}(x) &= A_1^{(n)}\cos x + A_2^{(n)}\cos 2x + \cdots + A_n^{(n)}\cos nx, \\ P_2^{(n)}(x) &= B_1^{(n)}\sin x + B_2^{(n)}\sin 2x + \cdots + B_n^{(n)}\sin nx. \end{aligned}$$

Bei den Interpolationsstellen betrachten wir mit Tschebyscheff nur den Grenzfall, daß die Interpolationsstellen ein ganzes Intervall ausfüllen:

$$0 \leqq t \leqq \pi.$$

Der Annäherung durch cos-Polynome und der durch sin-Polynome entsprechen die folgenden beiden Systeme von Grundfunktionen und Multiplikatoren:

$$u_h^{(1)} = \cos hx, \qquad u_h^{(2)} = \sin hx,$$

$$v_h^{(1)} = \frac{1}{2}\operatorname{sg}(\cos hx), \quad v_h^{(2)} = \frac{1}{2}\operatorname{sg}(\sin hx),$$

$$h = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Tschebyscheffsche Methode ist also nahe mit der Cauchyschen verwandt. Sie hat aber den Vorteil, daß die Funktionen der zugehörigen Biorthogonalsysteme

$$\varphi_n^{(1)}, \chi_n^{(1)} \quad \text{und} \quad \varphi_n^{(2)}, \chi_n^{(2)}$$

explizit angegeben werden können.

Zunächst stellen wir die Normalgleichungen auf. Dazu brauchen wir die Werte von

$$(v_h^{(1)} u_k^{(1)}) \quad \text{bzw.} \quad (v_h^{(2)} u_k^{(2)}).$$

Wir gehen aus von folgenden Fourierreihen

$$\frac{1}{2}\operatorname{sg}(\cos x) = \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdots\right)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sg}(\sin x) = \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right).$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2}\operatorname{sg}(\cos hx) = \frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{2q+1}\cos(2q+1)hx$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sg}(\sin hx) = \frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{2q+1}\sin(2q+1)hx.$$

Demnach ist

$$(v_h^{(1)} u_k^{(1)}) = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sg}(\cos hx)\cos kx\,dx = \begin{cases}\dfrac{(-1)^q}{2q+1} & \text{falls } k=(2q+1)h\\ 0 & \text{sonst;}\end{cases}$$

$$(v_h^{(2)} u_k^{(2)}) = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sg}(\sin hx)\sin kx\,dx = \begin{cases}\dfrac{1}{2q+1} & \text{falls } k=(2q+1)h\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Die Normalgleichungen lauten also, wenn wir die Näherungspolynome in der Form (45) annehmen,

$$A_h^{(n)} - \frac{1}{3}A_{3h}^{(n)} + \frac{1}{5}A_{5h}^{(n)} - \cdots = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sg}(\cos hx)\,f_1(x)\,dx$$

bzw.

$$B_h^{(n)} + \frac{1}{3}B_{3h}^{(n)} + \frac{1}{5}B_{5h}^{(n)} + \cdots = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sg}(\sin hx)\,f_2(x)\,dx$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei ist $A_k^{(n)}$ bzw. $B_k^{(n)} = 0$, wenn $k > n$.

Um diese Normalgleichungen bequem auflösen zu können, führen wir folgende zahlentheoretische Hilfsfunktionen ein:

$$\psi_1(n) = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } n \\ (-1)^q & \text{für } n = 2q+1; \end{cases}$$

(46)

$$\psi_2(n) = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } n \\ 1 & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

Wir benötigen folgende Eigenschaften dieser Funktionen:

(47) $$\psi_1(a)\psi_1(b) = \psi_1(ab), \quad \psi_2(a)\psi_2(b) = \psi_2(ab),$$

(48) $$[\psi_1(n)]^2 = \psi_2(n).$$

Ferner kürzen wir ab:

$$U_h = \int_0^\pi \frac{1}{2}\,\mathrm{sg}(\cos hx) f_1(x)dx = (v_h^{(1)} f_1),$$

$$V_h = \int_0^\pi \frac{1}{2}\,\mathrm{sg}(\sin hx) f_2(x)dx = (v_h^{(2)} f_2).$$

Dann lauten die Normalgleichungen

(49) $$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \frac{\psi_1(k)}{k} A_{kh}^{(n)} = U_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

(50) $$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \frac{\psi_2(k)}{k} B_{kh}^{(n)} = V_h \quad [21])$$

$[x]$ bedeutet wie üblich die größte ganze Zahl $\leqq x$.

Zur Auflösung der Normalgleichungssysteme (49) und (50) ist es zweckmäßig, die aus der Zahlentheorie bekannte Möbiussche Funktion $\mu(n)$ zu verwenden. Bekanntlich ist insbesondere

(51) $\mu(n) = (-1)^q$, wenn n ein Produkt aus q verschiedenen Primzahlen

und

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n > 1, \end{cases}$$

wo über alle Teiler d von n zu summieren ist. Die Auflösung der Normalgleichungen geschieht nun so:

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \frac{\mu(k)\psi_1(k)}{k} U_{kh} = \sum_k \frac{\mu(k)\psi_1(k)}{k} \left(\sum_j \frac{\psi_1(j)}{j} A_{jkh}^{(n)} \right) \text{ wegen (49)},$$

$$= \sum_i \frac{\psi_1(i)}{i} A_{ih}^{(n)} \left(\sum_{k|i} \mu(k) \right) \text{ mit } i = jk \text{ und wegen (47)},$$

$$= A_h^{(n)} \quad \text{wegen (51)}.$$

Eine ganz ähnliche Rechnung gibt

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \frac{\mu(k)\psi_2(k)}{k} V_{kh} = B_h^{(n)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir fassen zusammen:

Das Verfahren von Tschebyscheff ordnet einer geraden Funktion $f_1(x)$ mit der Periode 2π und mit der Eigenschaft

[21]) Die hier und in den folgenden Gleichungen auftretenden unteren Indizes sind als Produkte, nicht als Doppel- oder mehrfache Indizes aufzufassen.

$$\int_0^{\pi} f_1(x)dx = 0$$

die cos-*Polynome*

$$P_1^{(n)}(x) = \sum_{h=1}^{n} A_h^{(n)} \cos hx$$

mit den Koeffizienten

$$A_h^{(n)} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \frac{\mu(k)\,\psi_1(k)}{k}\, U_{kh}$$

zu, wobei mit Hilfe der gegebenen Funktion $f_1(x)$ *die folgenden Integrale berechnet werden müssen:*

$$U_h = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{sg}(\cos hx)\, f_1(x)dx \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Einer ungeraden Funktion $f_2(x)$ *mit der Periode* 2π *werden durch das Tschebyscheffsche Verfahren die* sin-*Polynome*

$$P_2^{(n)}(x) = \sum_{h=1}^{n} B_h^{(n)} \sin hx$$

mit den Koeffizienten

$$B_h^{(n)} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \frac{\mu(k)\,\psi_2(k)}{k}\, V_{kh}$$

zugeordnet, wobei folgende Integrale berechnet werden müssen:

$$V_h = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{sg}(\sin hx)\, f_2(x)\, dx \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Schließlich ordnen wir noch die Näherungspolynome nach den Größen U_h bzw. V_h:

$$P_1^{(n)}(x) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \frac{\mu(k)\,\psi_1(k)}{k}\, U_{kh} \cos hx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} U_j \sum_{k|j} \frac{\mu(k)\,\psi_1(k)}{k} \cos \frac{j}{k}\, x.$$

Analog

$$P_2^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{n} V_j \sum_{k|j} \frac{\mu(k)\,\psi_2(k)}{k} \sin \frac{j}{k}\, x.$$

Daraus kann man die gesuchten Biorthogonalsysteme ohne weiteres ablesen:

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \sum_{k|n} \frac{\mu(k)\,\psi_1(k)}{k} \cos \frac{n}{k}\, x \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\chi_n^{(1)}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sg}(\cos nx)$$

bzw.

$$\varphi_n^{(2)}(x) = \sum_{k|n} \frac{\mu(k)\,\psi_2(k)}{k} \sin \frac{n}{k}\, x \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

$$\chi_n^{(2)}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sg}(\sin nx)$$

Die ersten φ-Funktionen sehen daher so aus:

$$\varphi_1^{(1)} = \cos x \qquad \varphi_1^{(2)} = \sin x$$
$$\varphi_2^{(1)} = \cos 2x \qquad \varphi_2^{(2)} = \sin 2x$$
$$\varphi_3^{(1)} = \cos 3x + \frac{1}{3}\cos x \qquad \varphi_3^{(2)} = \sin 3x - \frac{1}{3}\sin x$$
$$\varphi_4^{(1)} = \cos 4x \qquad \varphi_4^{(2)} = \sin 4x$$
$$\varphi_5^{(1)} = \cos 5x - \frac{1}{5}\cos x \qquad \varphi_5^{(2)} = \sin 5x - \frac{1}{5}\sin x$$
$$\varphi_6^{(1)} = \cos 6x + \frac{1}{3}\cos 2x \qquad \varphi_6^{(2)} = \sin 6x - \frac{1}{3}\sin 2x$$
$$\varphi_7^{(1)} = \cos 7x + \frac{1}{7}\cos x \qquad \varphi_7^{(2)} = \sin 7x - \frac{1}{7}\sin x$$
$$\varphi_8^{(1)} = \cos 8x \qquad \varphi_8^{(2)} = \sin 8x$$
$$\varphi_9^{(1)} = \cos 9x + \frac{1}{3}\cos 3x \qquad \varphi_9^{(2)} = \sin 9x - \frac{1}{3}\sin 3x$$
$$\varphi_{10}^{(1)} = \cos 10x - \frac{1}{5}\cos 2x \qquad \varphi_{10}^{(2)} = \sin 10x - \frac{1}{5}\sin 2x.$$

§ 6. Das Verfahren von Fischer-Hinnen.

Die Methode zur schnellen Bestimmung harmonischer Wellen von Fischer-Hinnen ist gleichfalls ein Sonderfall unseres Verfahrens. Zur bequemen Darstellung des Verfahrens zerlegen wir es wie im Beispiel von Tschebyscheff in zwei Teile: Annäherung durch cos-Polynome und Annäherung durch sin-Polynome.

Es bezeichne also wie in § 5

f_1 eine gerade Funktion
f_2 eine ungerade Funktion
} von der Periode 2π.

Und damit nur reine cos-Polynome auftreten, setzen wir auch hier voraus, daß

$$\int_0^{\pi} f_1(x)dx = 0.$$

Der Unterschied gegenüber dem Tschebyscheffschen Verfahren besteht nun darin, daß als Interpolationsstellen nur die Punkte in Frage kommen, die mit π kommensurabel sind, also die Stellen

$$x = \frac{p}{q}\pi \quad (p, q \text{ ganz}),$$

und daß die Multiplikatoren die folgende Gestalt haben:

$$v_h^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{für } x = \frac{2\pi\nu}{h} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, h-1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$v_h^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{für } x = \frac{\pi}{2h} + \frac{2\pi\nu}{h} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, h-1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Grundfunktionen bleiben dieselben. Aber bei der Bildung der $(v_h u_h)$ muß jetzt summiert statt integriert werden.

Wir verwenden folgende Abkürzungen:

$$R_h = \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1} f\left(\frac{2\pi\nu}{h}\right) \tag{52}$$

$$S_h = \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1} f\left(\frac{\pi}{2h} + \frac{2\pi\nu}{h}\right) \tag{53}$$

$(h = 1, 2, \ldots, n).$

Die Polynome $P_1^{(n)}(x)$ und $P_2^{(n)}(x)$ haben dieselbe Gestalt wie in § 5, auch die Funktion $\psi_1(n)$ hat die gleiche Bedeutung.

Zur Aufstellung der Normalgleichungen sind folgende Hilfsrechnungen nötig:

$$(v_h^{(1)} u_k^{(1)}) = \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1} \cos k\,\frac{2\pi\nu}{h} = 1, \text{ falls } \frac{k}{h} \text{ ganz},$$

oder

$$= \Re\,\frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left(e^{i\frac{2\pi k}{h}}\right)^{\nu} = 0, \text{ falls } \frac{k}{h} \text{ nicht ganz.}$$

$$(v_h^{(2)} u_k^{(2)}) = \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1} \sin k\left(\frac{\pi}{2h} + \frac{2\pi\nu}{h}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{k}{h}\,\frac{\pi}{2}\right), \text{ falls } \frac{k}{h} \text{ ganz},$$

oder

$$= \Im\,\frac{1}{h}\,e^{i\frac{\pi k}{2h}}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left(e^{i\frac{2\pi k}{h}}\right)^{\nu} = 0, \text{ falls } \frac{k}{h} \text{ nicht ganz.}$$

Die Normalgleichungen lauten daher

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} A_{kh}^{(n)} = R_h \tag{54}$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \psi_1(k)\, B_{kh}^{(n)} = S_h \tag{55}$$

$(h = 1, 2, \ldots, n).$

Die Auflösung dieser Normalgleichungen geschieht mit Hilfe der Möbiusschen Funktion wie in § 5. Man findet:

Das Verfahren von Fischer-Hinnen ordnet einer geraden Funktion $f_1(x)$ mit der Periode 2π und mit der Eigenschaft

$$\int_0^{\pi} f_1(x)dx = 0$$

die cos-*Polynome*

$$P_1^{(n)}(x) = \sum_{h=1}^{n} A_h^{(n)} \cos hx$$

mit den Koeffizienten

$$A_h^{(n)} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \mu(k)\, R_{kh}$$

zu, wobei aus den bekannten Funktionswerten nur die folgenden arithmetischen Mittel zu bilden sind:

$$R_h = \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1} f_1\left(\frac{2\pi\nu}{h}\right) \quad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Einer geraden Funktion $f_2(x)$ mit der Periode 2π werden dagegen die sin-*Polynome*

$$P_2^{(n)}(x) = \sum_{h=1}^{n} B_h^{(n)} \sin hx$$

mit den Koeffizienten

$$B_h^{(n)} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \mu(k)\,\varphi_1(k)\,S_{hk}$$

zugeordnet, wobei folgende arithmetische Mittel berechnet werden müssen:

$$S_h = \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1} f_2\left(\frac{\pi}{2h} + \frac{2\pi\nu}{h}\right) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Funktionen der zugehörigen Biorthogonalsysteme findet man auch hier durch Umordnen der Näherungspolynome nach den Größen R_h bzw. S_h:

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \sum_{k|n} \mu(k) \cos\frac{n}{k}x,\ \chi_n^{(1)}(x) = v_n^{(1)}$$

bzw.

$$\varphi_n^{(2)}(x) = \sum_{k|n} \mu(k)\,\varphi_1(k) \sin\frac{n}{k}x,\ \chi_n^{(2)}(x) = v_n^{(2)}.$$

Die ersten zehn φ-Funktionen lauten daher:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^{(1)} &= \cos x & \varphi_1^{(2)} &= \sin x\\
\varphi_2^{(1)} &= \cos 2x - \cos x & \varphi_2^{(2)} &= \sin 2x\\
\varphi_3^{(1)} &= \cos 3x - \cos x & \varphi_3^{(2)} &= \sin 3x + \sin x\\
\varphi_4^{(1)} &= \cos 4x - \cos 2x & \varphi_4^{(2)} &= \sin 4x\\
\varphi_5^{(1)} &= \cos 5x - \cos x & \varphi_5^{(2)} &= \sin 5x - \sin x\\
\varphi_6^{(1)} &= \cos 6x - \cos 3x & \varphi_6^{(2)} &= \sin 6x + \sin 2x\\
\varphi_7^{(1)} &= \cos 7x - \cos x & \varphi_7^{(2)} &= \sin 7x + \sin x\\
\varphi_8^{(1)} &= \cos 8x - \cos 4x & \varphi_8^{(2)} &= \sin 8x\\
\varphi_9^{(1)} &= \cos 9x - \cos 3x & \varphi_9^{(2)} &= \sin 9x + \sin 3x\\
\varphi_{10}^{(1)} &= \cos 10x - \cos 5x - \cos 2x + \cos x & \varphi_{10}^{(2)} &= \sin 10x - \sin 2x
\end{aligned}$$

Die Nullstellen dieser Polynome sind im allgemeinen nicht alle reell. So hat z. B.

$$\varphi_{10}^{(1)} = \cos 10x - \cos 5x - \cos 2x + \cos x$$

im Intervall $0 \leqq x < 2\pi$ nur 16 reelle Nullstellen und

$$\varphi_{15}^{(2)} = \sin 15x + \sin 5x - \sin 3x - \sin x$$

im gleichen Intervall nur 22 reelle Nullstellen.

§ 7. Das Verfahren von H. Bruns.

Wie wir in § 5 und § 6 gesehen haben, verläuft die Auflösung der Normalgleichungen bei der Tschebyscheffschen Methode ebenso einfach wie bei dem Verfahren von Fischer-Hinnen. Für die Beurteilung der praktischen Brauchbarkeit sind demnach nur die Ausdrücke U_h, V_h bzw. R_h, S_h maßgebend. Die Berechnung der Zahlen R_h und S_h verlangt nur Additionen. Die Berechnung der Integrale U_h und V_h bei der Tschebyscheffschen Methode verlangt schon mehr Rechenarbeit. H. Bruns[11]) hat nun eine andere Anordnung des Tschebyscheffschen Verfahrens vorgeschlagen, bei der die Integrale schließlich durch Summen ersetzt werden. Der Gedanke von Bruns besteht darin, die Integrationen auf die Näherungsfunktionen $P_1^{(n)}(x)$ und $P_2^{(n)}(x)$ abzuschieben

und zwar dadurch, daß man zunächst die Ableitungen der gegebenen Funktion durch trigonometrische Polynome nach der Tschebyscheffschen Methode annähert.

Um dieses abgeänderte Verfahren durchzuführen, setzen wir die gegebenen Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ als wenigstens stückweise differenzierbar voraus. Dann ist $f_2'(x)$ eine gerade Funktion und $f_1'(x)$ eine ungerade Funktion. Die Nebenbedingung für den Fourierkoeffizienten a_0 lautet jetzt

$$\int_0^\pi f_2'(x)dx = f_2(\pi) - f_2(0) = 0.$$

Diese Bedingung ist für stetige ungerade Funktionen $f_2(x)$ von selbst erfüllt. Die folgenden Betrachtungen gelten aber auch für Funktionen, die nur stückweise stetig sind. Wir nehmen aber an, daß die Funktionen an jeder Stelle von rechts und von links stetig sind und daß an einer Unstetigkeitsstelle x der Funktionswert $f(x)$ gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Dann ist für eine ungerade Funktion $f_2(x)$ sicher

$$f_2(0) = f_2(\pi) = 0.$$

Im übrigen behalten wir die in § 5 eingeführten Bezeichnungen bei und wenden das Verfahren von Tschebyscheff auf $f_2'(x)$ bzw. auf $f_1'(x)$ an. Es ist

$$U_h(f_2') = \int_0^\pi \frac{1}{2} \operatorname{sg}(\cos hx)\, f_2'(x)\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sg}(\cos hx)\, f_2'(x)dx.$$

Die Zeichenwechsel von $\operatorname{sg}(\cos hx)$ liegen bei

$$x_\nu = \frac{\pi}{2h} + \frac{\pi\nu}{h} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} 4U_h(f_2') &= \int_0^{x_0} f_2'(x)dx + \sum_{\nu=0}^{2h-2} (-1)^{\nu+1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f_2'(x)dx + \int_{x_{2h-1}}^{2\pi} f_2'(x)dx \\ &= f_2(x_0) + \sum_{\nu=0}^{2h-2} (-1)^{\nu+1}[f_2(x_{\nu+1}) - f_2(x_\nu)] - f_2(x_{2h-1}) \\ &= 2\sum_{\nu=0}^{2h-1} (-1)^\nu f_2(x_\nu). \end{aligned}$$

Diese Summe läßt sich weiter vereinfachen, wenn man über die geraden und über die ungeraden ν getrennt summiert:

$$U_h(f_2') = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{h-1} f_2\left(\frac{\pi}{2h} + \frac{2\pi\nu}{h}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{h-1} f_2\left(\frac{\pi}{2h} + \frac{(2\nu+1)\pi}{h}\right).$$

Setzt man in der zweiten Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung $\nu = h-1-\lambda$, so ergibt sich

$$\sum_{\nu=0}^{h-1} f_2\left(\frac{\pi}{2h} + \frac{(2\nu+1)\pi}{h}\right) = -\sum_{\lambda=0}^{h-1} f_2\left(\frac{\pi}{2h} + \frac{2\lambda\pi}{h}\right),$$

weil $f_2(x)$ nach Voraussetzung eine ungerade Funktion mit der Periode 2π ist.

Infolgedessen ist

$$U_h(f_2') = \sum_{\nu=0}^{h-1} f_2\left(\frac{\pi}{2h} + \frac{2\nu\pi}{h}\right).$$

Durch Vergleich mit der Formel (53) des § 6 erhält man die Beziehung

$$U_h(f_2') = hS_h(f_2). \tag{56}$$

Für die ungerade Funktion $f_1'(x)$ gilt

$$V_h(f_1') = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{sg}(\sin hx)\, f_1'(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sg}(\sin hx)\, f_1'(x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{2h-1}(-1)^{\nu}\int_{\frac{\pi\nu}{h}}^{\frac{\pi(\nu+1)}{h}} f_1'(x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{2h-1}(-1)^{\nu}\left[f_1\left(\frac{\pi(\nu+1)}{h}\right) - f_1\left(\frac{\pi\nu}{h}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{2h-1}(-1)^{\nu} f_1\left(\frac{\pi\nu}{h}\right) \quad (\text{weil } f_1(2\pi) = f_1(0)).$$

Folglich ist, wenn wir wieder die Summation nach geraden und nach ungeraden ν trennen,

$$V_h(f_1') = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{h-1} f_1\left(\frac{2\nu+1)\pi}{h}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{h-1} f_1\left(\frac{2\nu\pi}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{h-1} f_1\frac{(2\nu+1)\pi}{h} - \frac{h}{2}R_h(f_1), \quad \text{gemäß (52).}$$

Die abgeänderte Tschebyscheffsche Methode geht also nicht von den Integralen U_h und V_h aus, sondern von den Summen

$$S_h(f_2) = \frac{1}{h}U_h(f_2') = \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1} f_2\left(\frac{\pi}{2h} + \frac{2\nu\pi}{h}\right)$$

$$T_h(f_1) = -\frac{1}{h}V_h(f_1') = \frac{1}{2h}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left[f_1\left(\frac{2\nu\pi}{h}\right) - f_1\left(\frac{(2\nu+1)\pi}{h}\right)\right].$$

Dementsprechend ziehen wir bei der Aufstellung der Normalgleichungen auch die Ableitungen der Näherungsfunktionen heran:

$$\frac{dP_1^{(n)}}{dx} = -\sum_{h=1}^{n} hA_h^{(n)} \sin hx$$

bzw.

$$\frac{dP_2^{(n)}}{dx} = \sum_{h=1}^{n} hB_h^{(n)} \cos hx.$$

Durch sinngemäße Übertragung von (49) und (50) erhält man die Normalgleichungen

$$S_h = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \frac{\psi_1(x)}{k}\, k\, h\, B_{kh}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \psi_1(k)\, B_{kh}^{(n)}$$

bzw.

$$T_h = -\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \frac{\psi_2(k)}{k}(-k\,h\,A_{kh}^{(n)}) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \psi_2(k)\, A_{kh}^{(n)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Von den Normalgleichungen aus gesehen besteht also der Unterschied zwischen dem Brunschen und dem Fischer-Hinnenschen Verfahren darin, daß die in den Formeln des ersteren Verfahrens auftretende Funktion $\psi_2(k)$ bei dem Verfahren von Fischer-Hinnen für alle k durch 1 ersetzt wird.

Die Auflösung der Normalgleichungen geschieht auch hier mit Hilfe der Möbiusschen Funktion. Man findet:

Durch Anwendung des Brunsschen Verfahrens werden einer geraden Funktion $f_1(x)$ der Periode 2π und mit der Eigenschaft

$$\int_0^{\pi} f_1(x)dx = 0$$

die cos-Polynome

$$P_1^{(n)} = \sum_{h=1}^{n} A_h^{(n)} \cos hx$$

mit den Koeffizienten

$$A_h^{(n)} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{h}\right]} \mu(k)\, \psi_2(k)\; T_{kh}$$

zugeordnet, wobei

$$T_h = \frac{1}{2h} \sum_{\nu=0}^{h-1} \left[f_1\left(\frac{2\nu\pi}{h}\right) - f_1\left(\frac{(2\nu+1)\pi}{h}\right)\right] \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

Bei ungeraden Funktionen ist diese Methode mit der von Fischer-Hinnen identisch.

Für gerade Funktionen $f_1(x)$ mit der weiteren Symmetrieeigenschaft

$$f_1(\pi + x) = -f_1(x)$$

stimmen ebenfalls das Brunssche und das Fischer-Hinnensche Verfahren überein. Denn dann ist

$$\begin{aligned} R_h - T_h &= \frac{1}{2h} \sum_{\nu=0}^{h-1} f_1\left(\frac{2\nu\pi}{h}\right) + \frac{1}{2h} \sum_{\nu=0}^{h-1} f_1\left(\frac{(2\nu+1)\pi}{h}\right) \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{\nu=0}^{2h-1} f_1\left(\frac{\nu\pi}{h}\right) \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{\nu=0}^{h-1} f_1\left(\frac{\nu\pi}{h}\right) + \frac{1}{2h} \sum_{\nu=h}^{2h-1} f_1\left(\frac{\nu\pi}{h}\right) \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{\nu=0}^{h-1} f_1\left(\frac{\nu\pi}{h}\right) + \frac{1}{2h} \sum_{\nu=0}^{h-1} f_1\left(\pi + \frac{\nu\pi}{h}\right) = 0. \end{aligned}$$

Für den Fall gerader Funktionen lautet das Biorthogonalsystem beim Brunsschen Verfahren:

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \sum_{k|n} \mu(k)\, \psi_2(k) \cos\frac{n}{k}\, x, \quad \chi_n^{(1)}(x) = v_n^{(1)}.$$

Die ersten zehn φ-Funktionen lauten:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= \cos x \\ \varphi_2^{(1)} &= \cos 2x \\ \varphi_3^{(1)} &= \cos 3x - \cos x \\ \varphi_4^{(1)} &= \cos 4x \\ \varphi_5^{(1)} &= \cos 5x - \cos x \\ \varphi_6^{(1)} &= \cos 6x - \cos 2x \\ \varphi_7^{(1)} &= \cos 7x - \cos x \\ \varphi_8^{(1)} &= \cos 8x \\ \varphi_9^{(1)} &= \cos 9x - \cos 3x \\ \varphi_{10}^{(1)} &= \cos 10x - \cos 2x. \end{aligned}$$

Bei ungeraden Funktionen stimmt das Biorthogonalsystem mit dem überein, das aus dem Fischer-Hinnenschen Verfahren hervorgeht.

III. Teil.
Über die Güte der Annäherung.

§ 1. Der mittlere Fehler bei der Tschebyscheffschen und bei der Cauchyschen Methode.

In dieser Nummer wollen wir die Interpolationsverfahren von P. L. Tschebyscheff und von A. Cauchy mit der Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate vergleichen. Als Maß wählen wir, wie in der Einleitung hervorgehoben, den mittleren Fehler. Wir nehmen also an, daß $f(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ überall den mittleren Fehler μ hat und wir betrachten Näherungspolynome von der Form

$$P_n(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \cdots + A_n \sin nx.$$

Ist $K_n(t, x)$ der zugehörige Kern, dann ist der mittlere Fehler von $P_n(x)$ gegeben durch

$$\mu \sqrt{\int_0^\pi [K_n(t, x)]^2 dt}.$$

Wir betrachten der Reihe nach die Methode der kleinsten Quadrate (G), die von Tschebyscheff (T) und die von Cauchy (C). Als Grundfunktionen haben wir in allen drei Fällen

$$u_n = \sin(n + 1)x.$$

Die Multiplikatoren sind

im Falle G: $v_n = \sin(n + 1)x$,
im Falle T: $v_n = \operatorname{sg}[\sin(n + 1)x]$,
im Falle C: $v_n = \operatorname{sg}[\varphi_n(x)]$.

Die Funktionen des Biorthogonalsystems sind im Fall C auf Seite 39, im Falle T auf Seite 44 zusammengestellt. Im Falle G erhält man einfach

$$\varphi_n = \chi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(n + 1)x.$$

Mit Hilfe dieser Funktionen können die Kerne

$$K_n(t, x) = \chi_0(t)\varphi_0(x) + \chi_1(t)\varphi_1(x) + \cdots + \chi_n(t)\varphi_n(x)$$

gebildet werden und daraus läßt sich dann

$$H_n = \int_0^\pi [K_n(t, x)]^2 dt$$

bestimmen. Im Falle G ergibt sich

$$H_n(\mathrm{G}) = \frac{1}{\pi}[(n + 1) - \cos 2x - \cos 4x - \cdots - \cos(2n + 2)x].$$

Dieser Ausdruck ist das Minimum für alle Interpolationsverfahren mit den Grundfunktionen $u_n = \sin(n + 1)x$ und den Interpolationsstellen $0 \leqq t \leqq \pi$.

Die entsprechenden Ausdrücke für die Fälle T und C haben die Gestalt

$$H_n = \frac{\pi}{8}[c_{n0} - c_{n1} \cos 2x - c_{n2} \cos 4x - \cdots - c_{n,n+1} \cos(2n + 2)x].$$

Die Koeffizienten c_{nr} sind in den beiden folgenden Tabellen enthalten:

$\frac{8}{\pi} H_n(\mathrm{T})$

n	c_{n0}	c_{n1}	c_{n2}	c_{n3}	c_{n4}	c_{n5}	c_{n6}	c_{n7}	c_{n8}
0	1,000	1,000							
1	2,000	1,000	1,000						
2	2,889	0,889	1,000	1,000					
3	3,889	0,889	1,000	1,000	1,000				
4	4,858	0,751	1,018	0,956	1,133	1,000			
5	5,747	0,751	0,907	0,956	1,133	1,000	1,000		
6	6,732	0,693	0,806	0,991	1,090	1,095	1,057	1,000	
7	7,732	0,693	0,806	0,991	1,090	1,095	1,057	1,000	1,000

$$\frac{8}{\pi} H_n(C)$$

n	c_{n0}	c_{n1}	c_{n2}	c_{n3}	c_{n4}	c_{n5}	c_{n6}	c_{n7}	c_{n8}
0	1,000	1,000							
1	2,000	1,000	1,000						
2	2,910	0,841	1,033	1,035					
3	3,910	0,841	1,033	1,035	1,000				
4	4,859	0,820	0,959	0,989	1,067	1,024			
5	5,769	0,820	0,801	0,989	1,100	1,024	1,035		
6	6,759	0,830	0,629	1,032	1,045	1,209	1,008	1,005	
7	7,759	0,830	0,629	1,032	1,045	1,209	1,008	1,005	1,000

Man sieht daraus, daß die Funktionen $H_n(G)$, $H_n(T)$ und $H_n(C)$ nur sehr wenig voneinander abweichen.

Um ein besseres Bild von der Größe der Abweichungen zu erhalten, wollen wir nicht die Funktionen H_n selbst untersuchen, sondern nur ihr arithmetisches Mittel im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$, d. h. die Zahlen

$$h_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi H_n dx = \begin{cases} \dfrac{n+1}{\pi} & \text{im Falle G} \\ \dfrac{\pi}{8}\, c_{n0} & \text{im Falle T und G.} \end{cases}$$

Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

n	$h_n(G)$	$h_n(T)$	$h_n(C)$
0	0,318	0,393	0,393
1	0,637	0,785	0,785
2	0,954	1,134	1,143
3	1,273	1,527	1,535
4	1,592	1,908	1,908
5	1,910	2,257	2,265
6	2,228	2,644	2,654
7	2,546	3,037	3,047

Man sieht, daß die Methode von Cauchy nur ganz wenig schlechter ist als die Methode von Tschebyscheff.

Für den mittleren Fehler kommen nun nicht die h_n selbst in Frage, sondern deren Wurzeln.

Wir stellen daher in der folgenden Tabelle die absoluten und relativen Abweichungen der mittleren Fehler der Tschebyscheffschen und der Cauchyschen Methode zusammen.

n	$\Delta(T) = \sqrt{h_n(T)} - \sqrt{h_n(G)}$	$\Delta(C) = \sqrt{h_n(C)} - \sqrt{h_n(G)}$	$\dfrac{\Delta(T)}{\sqrt{h_n(G)}}$	$\dfrac{\Delta(C)}{\sqrt{h_n(G)}}$
0	0,063	0,063	0,111	0,111
1	0,088	0,088	0,111	0,111
2	0,088	0,092	0,090	0,094
3	0,107	0,111	0,095	0,098
4	0,120	0,120	0,095	0,095
5	0,120	0,123	0,087	0,089
6	0,133	0,137	0,089	0,092
7	0,147	0,150	0,092	0,094

Die relative Abweichung des mittleren Fehlers beträgt also sowohl bei der Tschebyscheffschen wie auch bei der Cauchyschen Methode für kleine n höchstens 12 Prozent, eine Abweichung, die wohl in vielen Fällen nicht ins Gewicht fällt.

P. Harzer[22]) fand für die Fehler bei der Tschebyscheffschen Methode und die bei der Methode der kleinsten Quadrate das Verhältnis 9:8, was also mit unseren Ergebnissen gut übereinstimmt.

§ 2. Ein Beispiel zur Cauchyschen Interpolationsmethode.

Der für die Bestimmung der mittleren Abweichung der Näherungsfunktion $P_n(x)$ von $f(x)$ zu bildende Ausdruck

$$\sum_t [P_n(t) - f(t)]^2 \text{ bzw. } \int_a^b [P_n(t) - f(t)]^2 dt$$

kann bei der Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate leicht allgemein berechnet werden. In diesem Falle ist nämlich

$$P_n(x) = (\varphi_0 f)\varphi_0(x) + (\varphi_1 f)\varphi_1(x) + \cdots + (\varphi_n f)\varphi_n(x),$$

wenn man das Orthogonalsystem $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ zugrunde legt. Folglich ist unter Benutzung der Orthogonalitätsbeziehungen, wenn die Abweichung $L(x) = P_n(x) - f(x)$ gesetzt wird:

$$(LL) = (ff) - \sum_{k=0}^{n} (\varphi_k f)^2.$$

Geht man von der Näherungsfunktion P_n zu der nächsten P_{n+1} über, so nimmt dieser Ausdruck um $(\varphi_{n+1} f)^2$ ab. Bei der Methode der kleinsten Quadrate nimmt also die mittlere Abweichung mit wachsendem n niemals zu.

Diese Eigenschaft brauchen aber andere Interpolationsmethoden nicht zu besitzen. H. Seeliger hat für die Cauchysche Methode ein Beispiel gegeben, bei welchem die mittlere Abweichung tatsächlich zunimmt. Wir wollen dieses Beispiel hier etwas ausführlicher untersuchen. Es lautet: Von den Interpolationsstellen t_k sind die Funktionswerte $f(t_k)$ durch folgende Tabelle gegeben:

k	t_k	$f(t_k)$
1	−1,899	+ 2,291
2	−1,507	+ 4,261
3	−1,047	+ 2,071
4	−0,645	− 0,750
5	−0,127	− 2,061
6	+ 0,336	+ 0,094
7	+ 0,798	+ 3,155
8	+ 1,359	+ 10,582
9	+ 1,572	+ 11,515
10	+ 1,905	+ 5,343
11	+ 2,177	+ 1,109
12	+ 2,362	+ 0,660
13	+ 2,606	+ 3,166

Die Funktion $f(x)$ soll durch gewöhnliche Polynome näherungsweise dargestellt werden. Seeliger hat diese Annäherung bis zu einem Polynom 2. Grades nach der Cauchyschen Methode ausgerechnet und dabei gefunden, daß die Ausdrücke (LL) am Anfang zunehmen, d. h. wenn man diese Zahlen als Maß für die Güte der Annäherung benützt, so folgt daraus, daß $f(x)$ durch das Polynom 0. Grades besser dargestellt wird als durch die Polynome 1. und 2. Grades. Es dürfte aber nicht richtig sein, ein Urteil

[22]) P. Harzer, Über eine von Herrn Tschebyscheff angegebene Interpolationsformel, Astronomische Nachrichten 115 (1886), S. 337.

über den Wert des Cauchyschen Verfahrens allein aus dem Zunehmen der Zahlen (LL) zu fällen. Wenn, wie wir es auch getan haben, die Methode der kleinsten Quadrate als die beste angesehen wird, dann muß man zur Beurteilung der Cauchyschen Methode nicht die Zahlen (LL) für sich allein betrachten, sondern man muß prüfen, in welchem Verhältnis die mittlere Abweichung

$$\sqrt{\frac{(LL)}{N}}$$

bei der Cauchyschen Methode zu der bei der Methode der kleinsten Quadrate steht. So haben wir es ja schon in der vorigen Nummer mit den mittleren Fehlern gemacht und dabei gefunden, daß der letztere bei der Cauchyschen Methode um höchstens 12 Prozent größer ist als bei der Methode der kleinsten Quadrate. Es wird sich zeigen, daß dasselbe auch für die mittlere Abweichung gilt, so daß, wenn keine große Genauigkeit verlangt wird, das Cauchysche Verfahren durchaus an die Stelle der Methode der kleinsten Quadrate treten kann.

Seeliger hat ferner übersehen, daß es wichtig ist, den Grad der Annäherung den vorliegenden Funktionswerten anzupassen. Die von ihm behandelte Funktion $f(x)$ hat, wie man leicht sieht, mindestens zwei Maxima und zwei Minima. Es ist also von vornherein nicht zu erwarten, daß ein Polynom 2. Grades eine gute Annäherung liefern wird. Wir wollen nun die Rechnung bis zu einem Polynom 5. Grades weitertreiben, von dem man wohl erst eine befriedigende Annäherung wird erhoffen können.

Die Annäherung durch Polynome bis zum 5. Grad lautet bei der Cauchyschen Methode:

$$\begin{aligned} f(x) \approx\ & 3{,}187 + 1{,}550(x - 0{,}607) \\ & - 0{,}426(x^2 - 0{,}916x - 1{,}999) \\ & - 1{,}727(x^3 - 1{,}381x^2 - 2{,}447x + 1{,}679) \\ & - 0{,}505(x^4 - 1{,}642x^3 - 3{,}812x^2 + 4{,}177x + 1{,}731) \\ & + 0{,}791(x^5 - 1{,}887x^4 - 4{,}336x^3 + 5{,}951x^2 + 3{,}443x - 1{,}287). \end{aligned}$$

Dabei stehen in den Klammern die φ-Funktionen des Biorthogonalsystems. Die ersten Näherungsfunktionen sind demnach

$$\begin{aligned} P_0 &= 3{,}187 \\ P_1 &= 2{,}246 + 1{,}550x \\ P_2 &= 3{,}098 + 1{,}940x - 0{,}426x^2 \\ P_3 &= 0{,}198 + 6{,}166x + 1{,}959x^2 - 1{,}727x^3 \\ P_4 &= -0{,}676 + 4{,}057x + 3{,}884x^2 - 0{,}898x^3 - 0{,}505x^4 \\ P_5 &= -1{,}694 + 6{,}780x + 8{,}591x^2 - 4{,}328x^3 - 1{,}998x^4 + 0{,}791x^5. \end{aligned}$$

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert dagegen:

$$\begin{aligned} f(x) \approx\ & 3{,}187 + 0{,}707(x - 0{,}607) \\ & - 0{,}066(x^2 - 0{,}816x - 2{,}060) \\ & - 1{,}126(x^3 - 1{,}113x^2 - 3{,}174x + 1{,}436, \\ & - 0{,}445(x^4 - 1{,}497x^3 - 4{,}216x^2 + 3{,}851x + 2{,}477) \\ & + 0{,}782(x^5 - 1{,}840x^4 - 5{,}055x^3 + 6{,}802x^2 + 5{,}447x - 2{,}795) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} P_0 &= 3{,}187 \\ P_1 &= 2{,}758 + 0{,}707x \\ P_2 &= 2{,}894 + 0{,}761x - 0{,}066x^2 \\ P_3 &= 1{,}277 + 4{,}335x + 1{,}187x^2 - 1{,}126x^3 \\ P_4 &= 0{,}175 + 2{,}621x + 3{,}063x^2 - 0{,}460x^3 - 0{,}445x^4 \\ P_5 &= -2{,}011 + 6{,}881x + 8{,}382x^2 - 4{,}413x^3 - 1{,}884x^4 + 0{,}782x^5. \end{aligned}$$

Die Zahlen (LL) nach der Annäherung durch ein Polynom n-ten Grades lauten beim Verfahren von Cauchy (C) und bei der Methode der kleinsten Quadrate (G):

n	$(LL)_C$	$(LL)_G$
0	195,21	195,21
1	201,20	181,00
2	208,08	180,84
3	129,80	108,94
4	109,80	93,78
5	38,74	34,92

Bei der Methode von Cauchy nehmen also die Zahlen (LL) zunächst zu, aber diese Zunahme ist doch relativ klein, während bei der Methode der kleinsten Quadrate auch die Abnahme nur sehr langsam vor sich geht. Man erkennt weiter, daß bei Annäherung durch Polynome 3. Grades bei beiden Methoden eine starke Abnahme der Zahlen (LL) eintritt, die beim Übergang zu Polynomen 5. Grades noch stärker wird. Man sieht daraus, daß die Annäherung durch ein Polynom 2. Grades sehr ungünstig ist, wie wir es schon aus dem Verlauf der Werte $f(t)$ erwartet hatten.

Daß die Cauchysche Methode aber nur wenig schlechter ist als die Methode der kleinsten Quadrate, erkennt man beim Vergleich der Zahlen $\sqrt{(LL)}$, die ja, abgesehen von einem konstanten Faktor, das wahre Maß abgeben. Die folgende Tabelle enthält neben diesen Zahlen auch ihren absoluten und relativen Unterschied:

n	$\sqrt{(LL)_C}$	$\sqrt{(LL)_G}$	$\sqrt{(LL)_C}-\sqrt{(LL)_G}$	$\frac{\sqrt{(LL)_C}}{\sqrt{(LL)_G}}-1$
0	13,97	13,97	0,00	0,00
1	14,18	13,45	0,73	0,05
2	14,43	13,44	0,98	0,07
3	11,39	10,44	0,95	0,09
4	10,48	9,68	0,80	0,08
5	6,22	5,91	0,31	0,05

Die mittlere Abweichung bei der Cauchyschen Methode ist also nicht einmal 10 Proz. größer als bei der Methode der kleinsten Quadrate. In vielen praktischen Fällen wird man aber gar keine größere Genauigkeit verlangen können, so daß die Cauchysche Methode, trotz des von Seeliger bemerkten Nachteils, als Ersatz für die Methode der kleinsten Quadrate durchaus geeignet ist.

Eingegangen 5. Juli 1941.

Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. II.

Eine Modifikation des Dichtebegriffs.

Von *Alfred Stöhr* in Berlin.

§ 1.

Kleine lateinische Buchstaben bedeuten nichtnegative ganze Zahlen, kleine griechische Buchstaben nichtnegative reelle Zahlen oder (in einigen besonderen Fällen) das Symbol ∞. Große deutsche Buchstaben bedeuten Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen; $M(x)$ bedeutet die Anzahl der positiven Zahlen $\leqq x$ aus $\mathfrak{M}$.[1])

Für jedes x und für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ folge aus $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ und

$$A(m) \geqq \alpha m, \quad B(m) \geqq \beta m \qquad \text{für alle } m \text{ mit } 1 \leqq m \leqq x$$

(wo eo ipso

$$0 \leqq \alpha \leqq 1, \quad 0 \leqq \beta \leqq 1 \tag{1}$$

ist) die Aussage

$$C(x) \geqq \varrho(\alpha, \beta)\, x. \tag{2}$$

Bekanntlich ist das äquivalent mit der Aussage: Seien α, β, γ resp. die Dichten von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und sei $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$; dann ist

$$\gamma \geqq \varrho(\alpha, \beta). \tag{3}$$

Der Buchstabe ϱ sei im folgenden solchen im Bereich (1) definierten Funktionen vorbehalten, die die durch (2) beschriebene Eigenschaft besitzen.

Man kennt[2]) einige Funktionen $\varrho(\alpha, \beta)$, z. B.

$$\varrho(\alpha, \beta) = \min\,(\mu(\alpha + \beta), 1), \tag{4}$$

wo μ ein geeigneter Zahlfaktor ist. Man darf $\mu = \frac{2}{3}$ wählen; eine bekannte Vermutung lautet, man dürfe sogar

$$\mu = 1 \tag{5}$$

wählen. Ferner kann man beweisen, daß

$$\varrho(\alpha, \beta) = \alpha + \beta - \alpha\beta \tag{6}$$

eine zulässige Funktion ist.

Gelegentlich empfiehlt es sich, an Stelle des üblichen Dichtebegriffes $\operatorname{fin}_{x=1,2,\ldots} \frac{M(x)}{x}$ abgeänderte Dichtebegriffe zu verwenden. Sei $\varphi(x)$ eine Funktion mit

$$\varphi(x) > 0 \qquad \text{für alle } x \geqq 1; \tag{7}$$

dann heiße die stets existierende Zahl

---

[1]) Zu den benutzten Begriffen der additiven Zahlentheorie (Dichte, Summe u. dgl.) vgl. H. Rohrbach, Jber. DMV 48 (1939), 199—236.

[2]) Vgl. H. Rohrbach, a. a. O. [1]).

$$\text{(8)} \qquad \operatorname*{fin}_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{M(x)}{\varphi(x)}$$

die $\varphi(x)$-**Dichte** der Zahlmenge $\mathfrak{M}$. In der Theorie der Basen h-ter Ordnung interessieren beispielsweise die $\sqrt[h]{x}$-Dichten der Basen[3]). — Für $\varphi(x) = x$ geht (8) in die Dichte von $\mathfrak{M}$ über.

Ferner sei $\psi(x)$ eine Funktion mit

$$\text{(9)} \qquad \psi(x) > 0 \qquad \text{für alle } x \geqq 1,$$

dann heiße

$$\text{(10)} \qquad \lim_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{M(x)}{\psi(x)}$$

die $\psi(x)$-**Dichte der Zahlmenge $\mathfrak{M}$ im Großen**. Es empfiehlt sich, für (10) auch den Wert ∞ zuzulassen; dann existiert (10) immer und ist entweder eine nichtnegative reelle Zahl oder das Symbol ∞.

§ 2.

$\varphi(x)$ sei eine Funktion mit (7) und der Eigenschaft:

$$\text{(11)} \qquad \varphi(x)/x \quad \text{nimmt für } x \geqq 1 \text{ uneigentlich monoton ab.}$$

Dann ist also für $x \geqq 1$

$$\text{(12)} \qquad 0 < \varphi(x)/x \leqq \varphi(1).$$

Durch

$$\text{(13)} \qquad \tau(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \operatorname*{fin}_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{\varrho(\tilde{\alpha}\varphi(x)/x, \tilde{\beta}\varphi(x)/x)}{\varphi(x)/x}$$

wird jeder zulässigen Funktion ϱ eine im Bereich

$$\text{(14)} \qquad 0 \leqq \tilde{\alpha} \leqq 1/\varphi(1), \quad 0 \leqq \tilde{\beta} \leqq 1/\varphi(1)$$

definierte Funktion $\tau(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ zugeordnet. (Im Spezialfall $\varphi(x) = x$ erhält man offenbar $\tau(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \varrho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.) Der Buchstabe τ bezeichnet im folgenden stets Funktionen, die durch (13) definiert sind.

Hilfssatz 1. *Die Voraussetzungen* (7), (11) *seien erfüllt. Es sei* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, $x \geqq 1$, *und für*

$$\text{(15)} \qquad 1 \leqq m \leqq x$$

sei

$$\text{(16)} \qquad A(m) \geqq \tilde{\alpha}\varphi(m),$$

$$\text{(17)} \qquad B(m) \geqq \tilde{\beta}\varphi(m).$$

Dann ist

$$\text{(18)} \qquad C(x) \geqq \tau(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})\, \varphi(x).$$

Beweis. Aus (15), (16), (11) folgt

$$A(m) \geqq \tilde{\alpha}\varphi(m) = (\tilde{\alpha}\varphi(m)/m)m \geqq (\tilde{\alpha}\varphi(x)/x)m;$$

ebenso ist

$$B(m) \geqq (\tilde{\beta}\varphi(x)/x)m.$$

Mit $\alpha = \tilde{\alpha}\varphi(x)/(x)$, $\beta = \tilde{\beta}\varphi(x)/x$ sind nun die Voraussetzungen dafür erfüllt, daß nach (2)

[3]) Vgl. z. B. A. Stöhr, Math. Zeitschr. 47 (1942), 778-787.

$$C(x) \geqq \varrho(\alpha, \beta)x = \varrho(\tilde{\alpha}\varphi(x)/x, \tilde{\beta}\varphi(x)/x)x = \frac{\varrho(\tilde{\alpha}\varphi(x)/x, \tilde{\beta}\varphi(x)/x)}{\varphi(x)/x}\,\varphi(x)$$

ist. Daraus und aus (13) folgt die Behauptung (18).

Satz 1. *Die Voraussetzungen* (7), (11) *seien erfüllt. Es sei* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$. *Die* $\varphi(x)$-*Dichten von* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *seien resp.* $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$. *Dann gilt* (*als Analogon von* (3))

$$\tilde{\gamma} \geqq \tau(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}). \tag{19}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Hilfssatz 1.

Beispiel von Funktionen $\varphi(x)$: Die in Satz 1 gemachten Voraussetzungen (7), (11) werden von $\varphi(x) = x^{\vartheta}$ (ϑ eine feste Zahl mit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$) erfüllt.

Beispiele von Funktionen $\tau(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Die Funktion (4) liefert

$$\tau(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \min(\mu(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}), 1/\varphi(1));$$

dabei wurde (12), (13) benutzt. Wenn insbesondere die Vermutung (5) richtig ist, so ist unter den Voraussetzungen von Satz 1 die Verallgemeinerung dieser Vermutung

$$\tilde{\gamma} \geqq \min(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}, 1/\varphi(1))$$

ebenfalls richtig. — Die Funktion (6) liefert mit (12), (13)

$$\begin{aligned}\tau(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) &= \operatorname*{fin}_{x=1,2,\ldots} \frac{\tilde{\alpha}\varphi(x)/x + \tilde{\beta}\varphi(x)/x - (\tilde{\alpha}\varphi(x)/x)\,(\tilde{\beta}\varphi(x)/x)}{\varphi(x)/x} \\ &= \operatorname*{fin}_{x=1,2,\ldots} (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} - \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\varphi(x)/x) \\ &= \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} - \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\varphi(1).\end{aligned}$$

Wir formulieren Hilfssatz 1 unter Benutzung dieser Funktion als besonderen

Hilfssatz 2. *Die Voraussetzungen von Hilfssatz* 1 *seien erfüllt. Dann ist*

$$C(x) \geqq (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} - \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\varphi(1))\,\varphi(x). \tag{20}$$

§ 3.

Satz 2. $\psi(x)$ *sei eine Funktion mit* (9) *und den weiteren Eigenschaften: Für ein passendes* $n_0 \geqq 1$ *gilt:*

$$\psi(x)/x \text{ nimmt für } x \geqq n_0 \text{ uneigentlich monoton ab}; \tag{21}$$

$$\psi(x) = o(x) \text{ für } x \to \infty. \tag{22}$$

Es sei $1 \in \mathfrak{A}$, $1 \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$. *Die* $\psi(x)$-*Dichten von* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *im Großen seien resp.* $\tilde{\alpha}^*, \tilde{\beta}^*, \tilde{\gamma}^*$. *Dann ist*

$$\tilde{\gamma}^* \geqq \tilde{\alpha}^* + \tilde{\beta}^*. \tag{23}$$

Vorbemerkungen. Hinsichtlich des Symbols ∞ ist (23) so zu verstehen, daß $\tilde{\gamma}^* = \infty$ ist, wenn $\tilde{\alpha}^*$ oder $\tilde{\beta}^*$ gleich ∞ ist; sind $\tilde{\alpha}^*$, $\tilde{\beta}^*$ endlich, so kann $\tilde{\gamma}^*$ eine Zahl $\geqq \tilde{\alpha}^* + \tilde{\beta}^*$ oder das Symbol ∞ sein. — Ohne (22) ist (23) falsch, auch wenn man zusätzlich eine Forderung wie $\tilde{\alpha}^* + \tilde{\beta}^* < \psi(1)$ stellt[4]). Wie in § 4 gezeigt werden soll, läßt sich (23) für viele $\psi(x)$ nicht mehr verschärfen.

Beweis. Wir können uns auf den Fall beschränken, daß α^*, β^* beide endlich und positiv sind, da sonst (23) trivial ist. Wir setzen

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \psi(n_0) \quad \text{für } 1 \leqq x \leqq n_0, \\ \psi_1(x) &= \psi(x) \quad \text{für } x \geqq n_0.\end{aligned}$$

---

[4]) Ein Beispiel gibt $\psi(x) = x$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} =$ Menge aller Zahlen, die entweder $\equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 5$ sind, $\tilde{\alpha}^* = \tilde{\beta}^* = \frac{1}{5}$, $\tilde{\gamma}^* = \frac{1}{5}$. Vgl. dazu den Bericht von H. Rohrbach, a. a. O. [1]), S. 217.

Dann folgt aus (21), (22)

(24) $\psi_1(x)/x$ nimmt für $x \geqq 1$ uneigentlich monoton ab;

(25) $\psi_1(x) = o(x)$ für $x \to \infty$.

Die $\psi_1(x)$-Dichten sind gleich den $\psi(x)$-Dichten:

$$(26)\quad \begin{cases} \lim\limits_{x=\overline{1,2,\ldots}} \dfrac{A(x)}{\psi_1(x)} = \lim\limits_{x=\overline{1,2,\ldots}} \dfrac{A(x)}{\psi(x)} = \tilde{\alpha}^*, \\ \lim\limits_{x=\overline{1,2,\ldots}} \dfrac{B(x)}{\psi_1(x)} = \lim\limits_{x=\overline{1,2,\ldots}} \dfrac{B(x)}{\psi(x)} = \tilde{\beta}^*, \\ \lim\limits_{x=\overline{1,2,\ldots}} \dfrac{C(x)}{\psi_1(x)} = \lim\limits_{x=\overline{1,2,\ldots}} \dfrac{C(x)}{\psi(x)} = \tilde{\gamma}^*. \end{cases}$$

ε sei eine Zahl mit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \tilde{\alpha}^*$, $\varepsilon < \tilde{\beta}^*$. Nach (26) kann man ein n_1 so wählen, daß die Ungleichungen

$$A(x) \geqq (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)\,\psi_1(x) \quad \text{für alle } x \geqq n_1,$$

$$B(x) \geqq (\tilde{\beta}^* - \varepsilon)\,\psi_1(x) \quad \text{für alle } x \geqq n_1$$

gleichzeitig gelten. Wegen (25) existiert ferner ein n_2 so, daß die Ungleichungen

$$n_2 \geqq n_1,$$

$$(27)\quad (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)\,\frac{\psi_1(n_2)}{n_2}\,n_1 \leqq 1,$$

$$(\tilde{\beta}^* - \varepsilon)\,\frac{\psi_1(n_2)}{n_2}\,n_1 \leqq 1,$$

$$(28)\quad \frac{\psi_1(n_2)}{n_2} \leqq \varepsilon$$

gleichzeitig gelten. Wir setzen nun

$$(29)\quad \varphi(x) = \frac{\psi_1(n_2)}{n_2}\,x \quad \text{für } 1 \leqq x \leqq n_2,$$

$$(30)\quad \varphi(x) = \psi_1(x) \quad \text{für } x \geqq n_2.$$

Die Funktion $\varphi(x)$ ist dadurch offenbar für $x \geqq 1$ eindeutig definiert und erfüllt (7). Sie erfüllt auch (11), was aus (24), (29), (30) unmittelbar folgt. Ferner ist

$$(31)\quad A(x) \geqq (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)\,\varphi(x) \quad \text{für alle } x \geqq 1,$$

$$(32)\quad B(x) \geqq (\tilde{\beta}^* - \varepsilon)\,\varphi(x) \quad \text{für alle } x \geqq 1.$$

Für $1 \leqq x \leqq n_1$ ist nämlich wegen $1 \in \mathfrak{A}$ und (27), (29)

$$A(x) \geqq 1 \geqq (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)\,\frac{\psi_1(n_2)}{n_2}\,n_1 \geqq (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)\,\frac{\psi_1(n_2)}{n_2}\,x = (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)\,\varphi(x),$$

für $n_1 \leqq x \leqq n_2$ ist wegen (24), (29)

$$A(x) \geqq (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)\,\psi_1(x) = (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)\,\frac{\psi_1(x)}{x}\,x \geqq (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)\,\frac{\psi_1(n_2)}{n_2}\,x = (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)\,\varphi(x),$$

und für $x \geqq n_2$ ist wegen (30)

$$A(x) \geqq (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)\,\psi_1(x) = (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)\,\varphi(x).$$

(32) beweist man ebenso.

Mit (7), (11), (31), (32), $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^* - \varepsilon$, $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}^* - \varepsilon$ sind nun die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt; es ist also nach (20)

$$(33)\quad C(x) \geqq ((\tilde{\alpha}^* - \varepsilon) + (\tilde{\beta}^* - \varepsilon) - (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)(\tilde{\beta}^* - \varepsilon)\,\varphi(1))\,\varphi(x).$$

Wegen (28), (29) ist $\varphi(1) \leqq \varepsilon$; wegen (30) kann $\varphi(x)$ für $x \geqq n_2$ durch $\psi_1(x)$ ersetzt werden. Daher folgt aus (33)

$$C(x) \geqq ((\tilde{\alpha}^* - \varepsilon) + (\tilde{\beta}^* - \varepsilon) - (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)(\tilde{\beta}^* - \varepsilon)\varepsilon)\,\psi_1(x) \quad \text{für } x \geqq n_2$$

und, unter Heranziehung von (26),

$$\tilde{\gamma}^* = \varliminf_{x=1,2,\ldots} \frac{C(x)}{\psi_1(x)} \geqq (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon) + (\tilde{\beta}^* - \varepsilon) - (\tilde{\alpha}^* - \varepsilon)(\tilde{\beta}^* - \varepsilon)\varepsilon.$$

Durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung (23).

Beispiel. Die in Satz 2 über $\psi(x)$ gemachten Voraussetzungen (9), (21), (22) werden von allen $\psi(x) = x^\vartheta$ (ϑ eine feste Zahl mit $0 \leqq \vartheta < 1$) erfüllt.

Satz 3. *$\psi(x)$ sei eine Funktion mit den Eigenschaften* (9), (21), (22). *$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k, \mathfrak{C}$ seien Zahlmengen, deren $\psi(x)$-Dichten im Großen resp. $\tilde{\alpha}_1^*, \tilde{\alpha}_2^*, \ldots, \tilde{\alpha}_k^*, \tilde{\gamma}^*$ seien. Die Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ mögen die Zahl 1 enthalten. Es sei $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_k = \mathfrak{C}$. Dann ist*

$$\tilde{\gamma}^* \geqq \tilde{\alpha}_1^* + \tilde{\alpha}_2^* + \cdots + \tilde{\alpha}_k^*.$$

Beweis. Folgt aus Satz 2 durch vollständige Induktion über k.

§ 4.

Es sollen Beispiele dafür gegeben werden, daß (23) in vielen Fällen nicht verschärft werden kann.

$[\vartheta]^+$ bezeichne die ganze Zahl mit $\vartheta \leqq [\vartheta]^+ < \vartheta + 1$ (also $[\vartheta]^+ = -[-\vartheta]$).

Hilfssatz 3. *$\xi(x)$, $\eta(x)$, $\zeta(x)$ seien für $x \geqq 1$ definiert. Es sei für alle $x \geqq 1$*

(34) $$0 < \xi(x) \leqq x,$$
$$0 < \eta(x) \leqq x,$$

(35) *$\xi(x)$ und $x - \xi(x)$ monoton nicht abnehmend,*
$\eta(x)$ und $x - \eta(x)$ monoton nicht abnehmend.

Für $x \to \infty$ sei

(36) $$\begin{cases} \xi(x) \to \infty, \\ x - \xi(x) \to \infty, \\ \eta(x) \to \infty, \\ x - \eta(x) \to \infty, \\ \zeta(x) \to \infty. \end{cases}$$

Dann gibt es Zahlmengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ mit $1 \in \mathfrak{A}$, $1 \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$,

(37) $$\varliminf_{x=1,2,\ldots} \frac{A(x)}{\xi(x)} = \varlimsup_{x=1,2,\ldots} \frac{A(x)}{\xi(x)} = 1,$$
$$\varliminf_{x=1,2,\ldots} \frac{B(x)}{\eta(x)} = \varlimsup_{x=1,2,\ldots} \frac{B(x)}{\eta(x)} = 1,$$

(38) $C(x) < \xi(x) + \eta(x) + \zeta(x)$ *für unendlich viele x.*

Beweis. Es werde $A(0) = B(0) = x_0 = \xi(0) = \eta(0) = 0$ gesetzt. Die Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werden schrittweise konstruiert; gleichzeitig konstruieren wir eine Zahlfolge $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots$. x_i sei bereits festgesetzt, und es sei für alle ganzen Zahlen $\leqq x_i$ bereits festgesetzt, ob sie zu $\mathfrak{A}$ bzw. zu $\mathfrak{B}$ gehören oder nicht. Die Anzahlfunktionen $A(x_i)$ und $B(x_i)$ sind also bereits bekannt; es sei

(39) $$A(x_i) \geqq \xi(x_i),$$
$$B(x_i) \geqq \eta(x_i).$$

Die Ungleichungen

$$\xi(x_{i+1}) > A(x_i), \tag{40}$$
$$\eta(x_{i+1}) > B(x_i),$$
$$x_{i+1} - \xi(x_{i+1}) > 1 + x_i - A(x_i), \tag{41}$$
$$x_{i+1} - \eta(x_{i+1}) > 1 + x_i - B(x_i),$$
$$\zeta(x_{i+1}) > 2 + 2x_i - A(x_i) - B(x_i) \tag{42}$$

gelten wegen (36) für alle hinreichend großen Zahlen x_{i+1}. Wir wählen eine feste Zahl x_{i+1} so, daß alle genannten Ungleichungen gleichzeitig gelten. Wir setzen dann

$$y_i = [\xi(x_{i+1})]^+ + x_i - A(x_i), \tag{43}$$
$$z_i = [\eta(x_{i+1})]^+ + x_i - B(x_i).$$

(43) definiert jedenfalls eine ganze Zahl y_i; sie erfüllt die Ungleichung

$$x_i < y_i < x_{i+1} \tag{44}$$

(also insbesondere $y_i \geqq 0$, womit die Bezeichnung der Größe y_i durch einen kleinen lateinischen Buchstaben gerechtfertigt ist). Aus (43), (40) folgt nämlich

$$y_i \geqq \xi(x_{i+1}) + x_i - A(x_i) > A(x_i) + x_i - A(x_i) = x_i,$$

und aus (43), (41) folgt

$$y_i < \xi(x_{i+1}) + 1 + x_i - A(x_i) < \xi(x_{i+1}) + x_{i+1} - \xi(x_{i+1}) = x_{i+1},$$

womit (44) bewiesen ist. Ebenso beweist man

$$x_i < z_i < x_{i+1}.$$

Wir setzen nun fest: Die Zahlen x

mit $x_i < x \leqq y_i$ gehören zu $\mathfrak{A}$,
mit $y_i < x \leqq x_{i+1}$ gehören nicht zu $\mathfrak{A}$,
mit $x_i < x \leqq z_i$ gehören zu $\mathfrak{B}$,
mit $z_i < x \leqq x_{i+1}$ gehören nicht zu $\mathfrak{B}$

(insbesondere also für $i = 0$: $1 \in \mathfrak{A}$, $1 \in \mathfrak{B}$). Dann erhält man für $x_i < x \leqq y_i$ unter Benutzung von (39) und (35) (bzw. (39) und (34) für $i = 0$)

$$\begin{aligned} A(x) &= A(x_i) + x - x_i \geqq \xi(x_i) + x - x_i \\ &= x - (x_i - \xi(x_i)) \geqq x - (x - \xi(x)) = \xi(x). \end{aligned}$$

Für $y_i < x \leqq x_{i+1}$ erhält man unter Benutzung von (43) und (35)

$$A(x) = A(x_i) + y_i - x_i = [\xi(x_{i+1})]^+ \begin{cases} \geqq \xi(x_{i+1}) \geqq \xi(x), \\ < \xi(x_{i+1}) + 1. \end{cases}$$

Also ist für alle x mit $x_i < x \leqq x_{i+1}$

$$A(x) \geqq \xi(x) \tag{45}$$

(was für $x = x_{i+1}$ die Induktionsvoraussetzung (39) mit $i + 1$ statt i liefert), und außerdem ist

$$A(x_{i+1}) < \xi(x_{i+1}) + 1. \tag{46}$$

Setzt man nun diese Konstruktion ins Unendliche fort, so ergibt sich dabei die Gültigkeit der Ungleichung (45) für alle $x > 0$. Daraus folgt

$$\lim_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(x)}{\xi(x)} \geqq \operatorname{fin}_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(x)}{\xi(x)} \geqq 1.$$

Aus der Betrachtung der speziellen Werte $x_1, x_2, \ldots$ und (46), (36) folgt dagegen

$$\operatorname{fin}_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(x)}{\xi(x)} \leqq \lim_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(x)}{\xi(x)} \leqq \lim_{i=\overline{0,1,\ldots}} \frac{A(x_{i+1})}{\xi(x_{i+1})} \leqq \lim_{i=\overline{0,1,\ldots}} \frac{\xi(x_{i+1}) + 1}{\xi(x_{i+1})} = 1.$$

Zusammen ergeben diese Ungleichungen die Behauptung (37); die entsprechende Behauptung über $\mathfrak{B}$ beweist man ebenso.

$\mathfrak{C}$ definieren wir durch $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Zum Beweis von (38) schätzen wir $C(x_{i+1})$ ab. Sämtliche Zahlen $x \in \mathfrak{A}$ mit $x \leqq x_{i+1}$ erfüllen nach Konstruktion von $\mathfrak{A}$ die Ungleichung $x \leqq y_i$. Ebenso erfüllen alle $x \in \mathfrak{B}$ mit $x \leqq x_{i+1}$ die Ungleichung $x \leqq z_i$. Da $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ist, erfüllen folglich alle $x \in \mathfrak{C}$ mit $x \leqq x_{i+1}$ die Ungleichung $x \leqq y_i + z_i$. Daher ist

$$C(x_{i+1}) \leqq y_i + z_i.$$

Benutzt man nun die Definitionen von y_i, z_i sowie (42), so folgt weiter

$$\begin{aligned} C(x_{i+1}) \leqq y_i + z_i &= [\xi(x_{i+1})]^+ + x_i - A(x_i) + [\eta(x_{i+1})]^+ + x_i - B(x_i) \\ &< \xi(x_{i+1}) + \eta(x_{i+1}) + 2 + 2x_i - A(x_i) - B(x_i) \\ &< \xi(x_{i+1}) + \eta(x_{i+1}) + \zeta(x_{i+1}) \end{aligned}$$

für die unendlich vielen $x_1, x_2, \ldots$; damit ist (38) bewiesen.

Satz 4. *$\xi(x) = \tilde{\alpha}^* \psi(x)$ und $\eta(x) = \tilde{\beta}^* \psi(x)$ mögen die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 erfüllen.*

(*Beispiel.* $\psi(x) = x^\vartheta$, wo ϑ eine feste Zahl mit $0 < \vartheta < 1$; $0 < \tilde{\alpha}^* \leqq 1$, $0 < \tilde{\beta}^* \leqq 1$.) *Dann gibt es Zahlmengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ und*

$$\text{(47)} \qquad \operatorname*{fin}_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(x)}{\psi(x)} = \tilde{\alpha}^*,$$

$$\operatorname*{fin}_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{B(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{B(x)}{\psi(x)} = \tilde{\beta}^*,$$

$$\text{(48)} \qquad \operatorname*{fin}_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{C(x)}{\psi(x)} \leqq \lim_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{C(x)}{\psi(x)} \leqq \tilde{\alpha}^* + \tilde{\beta}^*$$

(*d. h. also,* (23) *kann hier nicht verschärft werden*).

Beweis. Die Voraussetzungen bedingen $\psi(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Wir setzen

$$\zeta(x) = \sqrt{\psi(x)}.$$

Die Konstruktion von Hilfssatz 3 liefert Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ mit

$$\operatorname*{fin}_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(x)}{\tilde{\alpha}^* \psi(x)} = \lim_{x=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(x)}{\tilde{\alpha}^* \psi(x)} = 1,$$

woraus (47) folgt; die entsprechende Behauptung über $B(x)$ beweist man ebenso. Für die Menge $\mathfrak{C}$ folgt aus (38) für unendlich viele x

$$\frac{C(x)}{\psi(x)} < \frac{\tilde{\alpha}^* \psi(x) + \tilde{\beta}^* \psi(x) + \sqrt{\psi(x)}}{\psi(x)} \to \tilde{\alpha}^* + \beta^*,$$

und daraus folgt (48).

Eingegangen 12. August 1941.

Berichtigungen zu Teil I (dieses Journal **183** (1941), 168-174).

S. 172, Zeile 27 lies: $h_4 \leqq 6$ statt: $h_4 \geqq 6$;

S. 173, Zeile 20 lies: von $h-1$ Zahlen statt von Zahlen.

Gegenbeispiel zu einer Frage über Basismengen der additiven Zahlentheorie.

Von *Hans-Heinrich Ostmann* in Breslau.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) braucht Herr A. Stöhr beim Beweis seines Satzes 3 die Voraussetzung:

$$(1) \qquad \underset{x=1,2,\ldots}{\text{fin}} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{l-1} A_n(x) = \sum_{n=1}^{l-1} \underset{x=1,2,\ldots}{\text{fin}} \frac{A_n(x)}{x} \quad \text{für ein } l \geqq h.$$

Hierin bedeutet $A_n(x)$ die Anzahl der positiven Elemente $\leqq x$ der Menge nA und A selbst eine Basis h-ter Ordnung. Ist die Voraussetzung (1) für irgendein $l \geqq h$ erfüllt, so gilt sie zugleich für jedes $l \geqq h$; es genügt daher $l = h$ anzunehmen. Herr Stöhr wirft anschließend die Frage auf, *ob* (1) *für jede Basis A der Ordnung h schon von selbst erfüllt ist*; ein Gegenbeispiel sei ihm nicht bekannt.

Es erscheint mir nicht ohne Interesse, daß Herr Stöhr durch seine Untersuchungen ebenfalls auf den auf der linken Seite von (1) stehenden Ausdruck geführt worden ist, den ich bei meinen auf ein anderes Ziel gerichteten Untersuchungen[2]) eingeführt und als sehr zweckmäßig empfunden habe. Man setze

$$\underset{x=1,2,\ldots}{\text{fin}} \frac{1}{x} \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x) = \sigma_n, \quad \underset{x=1,2,\ldots}{\text{fin}} \frac{A_n(x)}{x} = \alpha_n, \; n = 1, 2, \ldots.$$

Die Voraussetzung (1) lautet dann

$$(2) \qquad \sigma_{h-1} = \sum_{n=1}^{h-1} \alpha_n.$$

Im folgenden möchte ich das von Herrn Stöhr gesuchte Gegenbeispiel zu (2) geben.

Ich konstruiere dabei A als Basis dritter Ordnung. Es sei

$$A = A_1 = \{0, 1, 2, 3, 10, 11, 17, 18, \ldots\}$$

(dabei bedeute „…“, daß von der Stelle an alle ganzen Zahlen zur Menge gehören). Dann ist

$$2A = A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, \ldots\},$$
$$3A = A_3 = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Weiter ist:

---

[1]) A. Stöhr, Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. I. Mittlere Ordnung, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **188** (1941), S. 168—174.

[2]) H.-H. Ostmann, Über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen, Dtsch. Math. **5** (1940), S. 177 bis 212, insbesondere S. 180, Formel (7); ferner: Beweis einer Vermutung über die asymptotische Dichte und Verschärfung einer Abschätzung für die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen, Dtsch. Math. **6** (1941/42), S. 213—247.

$$\alpha_1 = \operatorname{Min}\left\{\frac{3}{9}, \frac{5}{16}\right\} = \operatorname{Min}\left\{\frac{1}{3}, \frac{5}{16}\right\} = \frac{5}{16},$$
$$\alpha_2 = \operatorname{Min}\left\{\frac{6}{9}, \frac{11}{16}\right\} = \operatorname{Min}\left\{\frac{2}{3}, \frac{11}{16}\right\} = \frac{2}{3},$$
$$\alpha_3 = 1$$

und

$$\sigma_2 = \operatorname*{fin}_{x=1,2,\ldots} \frac{A_1(x) + A_2(x)}{x} = \operatorname{Min}\left\{\frac{9}{9}, \frac{16}{16}\right\} = 1.$$

Somit ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{5}{16} + \frac{2}{3} = \frac{47}{48} < 1;$$

d. h. für diese Menge A ist in der Tat

$$\sigma_{h-1} = \sigma_2 > \alpha_1 + \alpha_2 = \sum_{n=1}^{h-1} \alpha_n.$$

Der in Rede stehende Satz 3 von Herrn Stöhr läßt sich nun folgendermaßen formulieren:

Es sei A eine Basis von der Ordnung h und der mittleren Ordnung λ; dann gilt stets

(3) $$\lambda = h - \sigma_{h-1} = l - \sigma_{l-1},\ l \geqq h.$$

In dieser Fassung des Satzes werden die Basisordnung und die mittlere Ordnung durcheinander ausgedrückt. Aus (3) folgt sofort, daß dann und nur dann $\lambda = h$ ist, wenn $\sigma_{h-1} = 0$ ist. Der entsprechende Satz bei Herrn Stöhr[2]) lautet zunächst scheinbar schärfer, nämlich: *Dann und nur dann ist $\lambda = h$, wenn $\alpha_{h-1} = 0$ ist.* Nach (1) bzw. (2) gilt ja doch von vornherein nur $\sigma_{h-1} \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{h-1} \geqq \alpha_{h-1}$, und es kann, wie ja gerade das oben angegebene Beispiel zeigt, durchaus das „>"-Zeichen stehen. Nun sind aber in diesem Beispiel die entsprechenden Größen σ_2 und α_2 beide positiv (1 bzw. $\frac{2}{3}$); aus (3) und dem zuletzt zitierten Satz von Herrn Stöhr zusammen folgt, daß das „>"-Zeichen niemals dann stehen kann, bzw. daß (1) stets dann von selbst erfüllt ist, wenn eine der beiden Seiten von (1) gleich Null ist. Dieses vielleicht zunächst überraschende Verhalten findet seine naturgemäße Begründung in der folgenden Formel:

$$\alpha_{h-1} \leqq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{h-1} \leqq \sigma_{h-1} \leqq (h-1)\,\alpha_{h-1},$$

wobei nur der letzte Teil eines Beweises bedarf.

Beweis. Es ist offenbar

$$\sum_{n=1}^{h-1} A_n(x) \leqq (h-1)\,A_{h-1}(x),$$

da ja $A_{h-1}(x) \geqq A_n(x)$ für alle $n = 1, 2, \ldots, h-1$ ist. Nach Division durch x ergibt sich sofort $\sigma_{h-1} \leqq (h-1)\alpha_{h-1}$, was zu zeigen war. Hierdurch und durch das oben angeführte Beispiel scheint mir die von Herrn Stöhr angeschnittene Frage vollständig geklärt zu sein.

---

[2]) Satz 5 der unter Fußnote [1]) genannten Arbeit.

Eingegangen 8. Oktober 1941.

This material is restricted in use and cannot be quoted by title or abstract for propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited.

Abbildungsklassen und Fixpunktklassen dreidimensionaler Linsenräume.

Von *Wolfgang Franz* aus Frankfurt a. M., z. Zt. in Berlin.

Die Homotopieklassen, in welche die eindeutigen stetigen Abbildungen einer Mannigfaltigkeit in eine andere zerfallen, sind nur in wenigen Fällen vollständig übersehbar. Im wesentlichen gilt das nur bei den zweidimensionalen Flächen und in dem Falle, daß eine der beiden Mannigfaltigkeiten eine Sphäre ist. Im ersten Fall bestimmt der durch die Abbildung vermittelte Homomorphismus der Fundamentalgruppen die Abbildungsklassen, im zweiten Falle entscheidet der Homomorphismus der Homologiegruppen über die Abbildungsklasse. Im folgenden werden die Homotopieklassen der eindeutigen stetigen Abbildungen dreidimensionaler Linsenräume mit demselben Drehnenner aufeinander vollständig aufgezählt. Die sämtlichen möglichen Homologietypen dieser Abbildungen sind bereits von M. Rueff [7] aufgestellt worden. Es handelt sich dort um die Homomorphismen der eindimensionalen und der dreidimensionalen Homologiegruppen. Der letztere wird allein durch den Abbildungsgrad gegeben. Der erstere ist, da in diesem Fall die Fundamentalgruppen kommutativ, also mit den eindimensionalen Homologiegruppen identisch sind, zugleich der Homomorphismus der Fundamentalgruppen. Es zeigt sich nun, daß der Abbildungsgrad und der Homomorphismus der Fundamentalgruppen zur Charakterisierung der Abbildungsklassen bereits ausreichen. Der Beweis benutzt die Eigenschaft der Fundamentalgruppe, Deckbewegungsgruppe der universellen Überlagerung zu sein. Neben einer gegebenen Abbildung zweier Linsenräume aufeinander wird die zugehörige „überlagernde Abbildung" der universellen Überlagerungen und ihre Beziehung zur Deckbewegungsgruppe betrachtet. Die allgemeinen vorbereitenden Sätze über Spurabbildungen und überlagernde Abbildungen des ersten Abschnittes dürften im wesentlichen bekannt sein. Der Beweis des ersten Haupttheorems im folgenden Abschnitt stützt sich auf Sätze von H. Hopf [1] über Fortsetzbarkeit von Vektorfeldern auf k-dimensionalen Elementen im n-dimensionalen Raum, welche von ihm bei der Untersuchung der Abbildungsklassen von Sphären benutzt wurden. Anschließend werden wie bei Rueff die Wertbereiche der gefundenen Invarianten festgestellt und ferner einige spezielle Abbildungen, insbesondere Spiegelungen näher untersucht. — Weiterhin werden für die Abbildungen der Linsenräume auf sich selbst die Fixpunkte und ihre Einteilung in Fixpunktklassen betrachtet. Für jede Abbildungsklasse werden im zweiten Haupttheorem die Fixpunktklassen und ihre Indizes angegeben, und zwar auf Grund der von K. Reidemeister [5] eingeführten kombinatorischen Methode. Diese Fixpunktklassen bilden zugleich ein Beispiel für den kürzlich von F. Wecken [8] bewiesenen Satz, nach welchem sich die Abbildungen so deformieren lassen, daß die Fixpunkte in jeder ein-

Reproduced and Distributed in the Public Interest by
THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN

zelnen Klasse in je einen einzigen Fixpunkt mit dem entsprechenden Index verschmelzen.

1. Überlagernde Abbildungen.

$\mathfrak{L}$ sei ein zusammenhängendes endliches Polyeder und $\mathfrak{G}$ seine Fundamentalgruppe. O sei ein Punkt von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{G}(O)$ die mit $\mathfrak{G}$ isomorphe, auf O als Anfangspunkt bezogene Wegegruppe von $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{f}$ sei eine stetige Abbildung [1]) von $\mathfrak{L}$ in ein zweites zusammenhängendes endliches Polyeder Λ mit der Fundamentalgruppe Γ. Es sei $\mathfrak{f}(O) = \Omega$ und $\Gamma(\Omega)$ die mit Γ isomorphe, auf Ω als Anfangspunkt bezogene Wegegruppe von Λ. Durch $\mathfrak{f}$ wird $\mathfrak{G}(O)$ homomorph in $\Gamma(\Omega)$ abgebildet und damit auch $\mathfrak{G}$ in Γ, jedoch ist der letztere Homomorphismus, infolge der willkürlichen Wahl von O, nur bis auf innere Automorphismen von Γ bestimmt.

Sei nun $\mathfrak{L}^*$ eine reguläre Überlagerung [2]) von $\mathfrak{L}$, Λ^* eine solche von Λ. Dann erhebt sich die Frage: Gibt es eine Abbildung $\mathfrak{f}^*$ von $\mathfrak{L}^*$ in Λ^* derart, daß alle Punkte P^* von $\mathfrak{L}^*$, welche dieselbe Spur in $\mathfrak{L}$ haben, in Punkte Π^* von Λ^* übergehen, welche dieselbe Spur in Λ haben? Eine solche Abbildung $\mathfrak{f}^*$ bestimmt rückwärts $\mathfrak{f}$ eindeutig; $\mathfrak{f}^*$ heiße eine überlagernde Abbildung von $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}$ Spur von $\mathfrak{f}^*$. Zur Beantwortung der Frage betrachten wir die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{L}^*$ und ihre Darstellung $\mathfrak{G}^*(O^*)$ als Wegegruppe in bezug auf einen über O gelegenen Anfangspunkt O^* von $\mathfrak{L}^*$. Durch Spurbildung für die einzelnen Wege wird $\mathfrak{G}^*(O^*)$ isomorph auf eine Untergruppe $\mathfrak{G}^*(O)$ von $\mathfrak{G}(O)$ abgebildet, und zwar ist, infolge der Regularität von $\mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{G}^*(O)$ Normalteiler von $\mathfrak{G}(O)$. Entsprechend kann auch $\mathfrak{G}^*$ als Untergruppe von $\mathfrak{G}$ aufgefaßt werden. Ferner sei Γ^* die Fundamentalgruppe von Λ^*. Wenn es eine Abbildung $\mathfrak{f}^*$ der genannten Art gibt, so wird dadurch $\mathfrak{G}^*(O^*)$ homomorph in $\Gamma^*(\Omega^*)$ abgebildet, wobei $\mathfrak{f}^*(O^*) = \Omega^*$ über Ω liegt. $\Gamma^*(\Omega^*)$ ist isomorph zu der durch Spurbildung entstehenden Untergruppe $\Gamma^*(\Omega)$ von $\Gamma(\Omega)$, und Γ^* kann entsprechend als Untergruppe von Γ angesehen werden. Wegen der Überlagerungseigenschaft von $\mathfrak{f}^*$ ergibt die Abbildung $\mathfrak{f}$, auf die Untergruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ angewandt, gerade die Abbildung $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{f}^*$ ist ein „Teil" von $\mathfrak{f}$. Zusammenfassend kann also gesagt werden: Wenn eine überlagernde Abbildung $\mathfrak{f}^*$ von $\mathfrak{L}^*$ in Λ^* existiert, so ist der dadurch gelieferte Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ in Γ derart, daß $\mathfrak{f}(\mathfrak{G}^*) < \Gamma^*$. Es soll nun gezeigt werden, daß diese Bedingung auch genügt, um die Existenz einer überlagernden Abbildung $\mathfrak{f}^*$ zu sichern.

Es sei also die Abbildung $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{L}$ in Λ gegeben und $\mathfrak{f}(\mathfrak{G}^*) < \Gamma^*$. O^* liege über O und Ω^* sei *beliebig* unter den über Ω liegenden Punkten ausgewählt. P^* sei ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{L}^*$, v^* ein Weg von O^* nach P^*, v die Projektion von v^* nach $\mathfrak{L}$, die von O nach P führe. φ sei das Bild des Weges v bei $\mathfrak{f}$ und führe von Ω nach Π, φ^* endlich sei der eindeutig bestimmte Weg in Λ^*, der von Ω^* ausgeht und über φ liegt; φ^* führe nach Π^*. Die Beziehung $\mathfrak{f}^*(P^*) = \Pi^*$ ist dann, so wird behauptet, eine stetige Abbildung von $\mathfrak{L}^*$ in Λ^*, welche $\mathfrak{f}$ überlagert. Jedenfalls ist $\mathfrak{f}^*$ nach Wahl von O^* und Ω^* eindeutig bestimmt. Wählt man nämlich an Stelle von v^* einen anderen Hilfsweg $\overline{v}^*$ von O^* nach P^*, so ist $\overline{v}^* v^{*-1}$ ein geschlossener Weg von O^* nach O^*, repräsentiert also ein Element der Wegegruppe $\mathfrak{G}^*(O^*)$. Die Projektion $\overline{v} v^{-1}$ gehört also zu $\mathfrak{G}^*(O)$, und wegen der Voraussetzung $\mathfrak{f}(\mathfrak{G}^*) < \Gamma^*$ liegt das Bild $\overline{\varphi}\varphi^{-1}$ in $\Gamma^*(\Omega)$. Der in Λ^* eindeutig bestimmte überlagernde Weg $\overline{\varphi}^* \varphi^{*-1}$ ist also geschlossen, und $\overline{\varphi}^*$ führt von Ω^* ebenfalls nach Π^*. Daß $\mathfrak{f}^*$ eine überlagernde Abbildung von $\mathfrak{f}$ ist, ist klar, ebenso, daß $\mathfrak{f}^*$ stetig ist.

---

[1]) Alle im folgenden zu betrachtenden Abbildungen von Polyedern werden als eindeutig und stetig vorausgesetzt, ohne daß es in jedem Falle ausdrücklich bemerkt wird.

[2]) Die folgenden Betrachtungen gelten mit entsprechenden Modifikationen natürlich auch für beliebige Überlagerungen.

Damit ist bewiesen:

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{f}$ *eine Abbildung des endlichen Polyeders* $\mathfrak{L}$ *in das endliche Polyeder* Λ *und sind* $\mathfrak{L}^*$ *und* Λ^* *reguläre Überlagerungen von* $\mathfrak{L}$ *und* Λ, *die zu den Untergruppen* $\mathfrak{G}^*$ *und* Γ^* *der Fundamentalgruppen von* $\mathfrak{L}$ *und* Λ *gehören, so gibt es dann und nur dann eine* $\mathfrak{f}$ *überlagernde Abbildung* $\mathfrak{f}^*$ *von* $\mathfrak{L}^*$ *in* Λ^*, *wenn* $\mathfrak{f}(\mathfrak{G}^*) < \Gamma^*$.

Dabei ist $\mathfrak{f}^*$ insoweit vieldeutig, als man einen beliebigen der über Ω gelegenen Punkte als Bild von O^* vorschreiben kann. — Übrigens sieht man leicht, daß dann $\mathfrak{f}^*$ eindeutig bestimmt ist.

Die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ bestimmt nicht nur die Wegegruppe von $\mathfrak{L}$, sondern auch die Deckbewegungen der Überlagerung $\mathfrak{L}^*$. Es soll jetzt das Verhalten der Deckbewegungsgruppe bei der Abbildung $\mathfrak{f}^*$ untersucht werden. — Wieder sei ein beliebiger Punkt P^* von $\mathfrak{L}^*$ und ein Weg v^* von O^* nach P^* betrachtet. g sei ein Element von $\mathfrak{G}$ und bezeichne zugleich den entsprechenden, nur bis auf homotope Wege bestimmten Weg in $\mathfrak{L}$ von O nach O. g^* sei der eindeutig bestimmte Weg in $\mathfrak{L}^*$, der über g liegt und in O^* beginnt, w^* sei der eindeutig bestimmte Weg in $\mathfrak{L}^*$, der dieselbe Spur in $\mathfrak{L}$ hat wie v^* und im Endpunkt von g^* beginnt. Dann wird dem Gruppenelement g von $\mathfrak{G}$ diejenige Selbstabbildung von $\mathfrak{L}^*$ zugeordnet, welche P^* in den Endpunkt $g(P^*)$ von w^* abbildet. $g(P^*)$ ist offenbar unabhängig von der Auswahl von v^*, wegen der Regularität von $\mathfrak{L}^*$, und unabhängig von der Auswahl des Weges g, also durch das Gruppenelement g eindeutig bestimmt. Ferner liegt $g(P^*)$ über derselben Spur wie P^*, die Abbildung, die ersichtlich stetig ist, ist also wirklich eine Deckbewegung von $\mathfrak{L}^*$. Ist umgekehrt eine Deckbewegung von $\mathfrak{L}^*$ über $\mathfrak{L}$ gegeben und ist g^* ein Weg von O^* nach seinem Bilde, g die Spur von g^* in $\mathfrak{L}$, so entsteht die Deckbewegung gerade durch die eben angegebene Konstruktion; jede Deckbewegung ist also in der geschilderten Art einem Gruppenelement g zugeordnet. Ist g' ein anderes Element von $\mathfrak{G}$, so gilt nach der eben angegebenen Konstruktion: $gg'(P^*) = g(g'(P^*))$, die Gruppe der Deckbewegungen ist also in diesem Sinn homomorph zur Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$. Alle und nur die Elemente g, die zu $\mathfrak{G}^*$ gehören, liefern, da dann g^* geschlossen ist, die identische Abbildung von $\mathfrak{L}^*$. Also ist die Deckbewegungsgruppe isomorph zur Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^*$.

Die Abbildung $\mathfrak{f}^*$ führt P^* in $\Pi^* = \mathfrak{f}^*(P^*)$ über. Was läßt sich nun über $\mathfrak{f}^*(g(P^*))$ sagen? Nach Konstruktion von $\mathfrak{f}^*$ hat man den Weg g^*w^* in den Weg $gw = gv$ in $\mathfrak{L}$ zu projizieren, ihn vermittels $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{f}(gw) = \mathfrak{f}(g)\mathfrak{f}(w)$ in Λ abzubilden und dann den entsprechenden überlagernden, von Ω^* ausgehenden Weg zu bilden. Der $\mathfrak{f}(w) = \mathfrak{f}(v)$ entsprechende Weg würde nach $\Pi^* = \mathfrak{f}^*(P^*)$ führen. Der $\mathfrak{f}(g)\mathfrak{f}(w)$ entsprechende Weg ergibt daher den Endpunkt $\mathfrak{f}(g)(\Pi^*)$, der aus Π^* durch Anwendung der Deckbewegung $\mathfrak{f}(g)$ von Λ^* über Λ entsteht. Es gibt also die folgende „Funktionalgleichung" für $\mathfrak{f}^*$:

Satz 2. $\mathfrak{f}^*(g(P^*)) = \mathfrak{f}(g)(\mathfrak{f}^*(P^*))$.

Im nächsten Abschnitt brauchen wir noch den folgenden Hilfssatz über den Abbildungsgrad von $\mathfrak{f}^*$ bei endlichblättrigen Überlagerungsmannigfaltigkeiten:

Satz 3. *Ist* $\mathfrak{L}^*$ *eine* m*-blättrige Überlagerung der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{L}$, Λ^* *eine* μ*-blättrige Überlagerung der Mannigfaltigkeit* Λ *und überlagert die Abbildung* $\mathfrak{f}^*$ *von* $\mathfrak{L}^*$ *in* Λ^* *vom Grade* c^* *die Abbildung* $\mathfrak{f}$ *von* $\mathfrak{L}$ *in* Λ *vom Grade* c, *so gilt* $mc = \mu c^*$, *insbesondere also* $c = c^*$, *wenn* $m = \mu$ *endlich ist.*

Seien nämlich s und σ die durch Spurbildung entstehenden Abbildungen von $\mathfrak{L}^*$ auf $\mathfrak{L}$ und Λ^* auf Λ. s ist vom Grade m, σ vom Grade μ. Wegen der Überlagerungseigenschaft von $\mathfrak{f}^*$ und $\mathfrak{f}$ stellen $s\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}^*\sigma$ ein und dieselbe Abbildung von $\mathfrak{L}^*$ in Λ dar. Der Grad dieser Abbildung berechnet sich nach der Produktregel für den Abbildungsgrad aus der einen Darstellung als mc, aus der anderen als $c^*\mu$, womit die Behauptung erwiesen ist.

2. Abbildungsklassen.

Der Linsenraum $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_m(q)$ wird wie folgt definiert (siehe [4], [6]). m sei eine natürliche Zahl. Im 4-dimensionalen Raum R_4 mit den komplexen Koordinaten $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$ wird durch die Gleichungen

$$g(r_1) = r_1,\ g(\alpha_1) = \alpha_1 + \frac{2\pi}{m},\ g(r_2) = r_2,\ g(\alpha_2) = \alpha_2 + \frac{2\pi}{m} q \text{ mit } (q, m) = 1$$

eine orthogonale Transformation g definiert. g ist von der Ordnung m, also $g^m = 1$, und mit Ausnahme des Koordinatenanfangspunktes ohne Fixpunkte. Jeder von diesem verschiedene Punkt P^* geht durch die Potenzen g^ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) in genau m verschiedene Punkte $g^\nu(P^*)$ über. Insbesondere wird die Einheitssphäre $\mathfrak{S}$ mit der Gleichung $r_1^2 + r_2^2 = 1$ durch g einer fixpunktlosen Drehung der Ordnung m unterworfen. $\mathfrak{L}$ entsteht durch Identifizierung jeweils der m Punkte $g^\nu(P^*)$ von $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{L}$ ist eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. $\mathfrak{S}$ ist eine Überlagerung von $\mathfrak{L}$, und zwar die universelle Überlagerung; alle Punkte von $\mathfrak{S}$, die auseinander durch Anwendung der Potenzen g^ν entstehen, liegen über demselben Punkte von $\mathfrak{L}$. Die zyklische Gruppe $\mathfrak{G}$ der g^ν bildet die Deckbewegungsgruppe von $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{L}$ und als abstrakte Gruppe zugleich die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{L}$. Nach K. Reidemeister [4] sind zwei orientierte Linsenräume $\mathfrak{L}_m(q)$ und $\mathfrak{L}_{m'}(q')$ dann und nur dann homöomorph, wenn $m' = m$ und $q' \equiv q^{\pm 1} \bmod m$ ist.

Sei $\mathfrak{f}$ eine Abbildung von $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_m(q)$ in einen anderen Linsenraum $\Lambda = \Lambda_m(\varkappa)$ mit der Fundamentalgruppe Γ, die ebenfalls zyklisch von der Ordnung m ist. Der Abbildungsgrad von $\mathfrak{f}$ sei c, die durch $\mathfrak{L}$ selbst gebildete Kette überdeckt also bei der Abbildung den Raum Λ gerade c-mal. $\mathfrak{G}$ werde durch $\mathfrak{f}$ so in Γ abgebildet, daß g in die Potenz γ^α der Erzeugenden γ von Γ übergeht; durch den Exponent α wird der Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ in Γ eindeutig bestimmt. Im folgenden soll gezeigt werden, daß der Grad c und der Exponent α die Abbildungsklasse von $\mathfrak{f}$ festlegen.

Die universelle Überlagerung Σ von Λ sei in entsprechender Weise als 3-Sphäre im gleichen R_4 dargestellt, die Erzeugende γ der Fundamentalgruppe Γ bezeichne ebenfalls die entsprechende orthogonale Transformation von Σ. Nach Satz 1 gibt es zu $\mathfrak{f}$ eine überlagernde Abbildung $\mathfrak{f}^*$ von $\mathfrak{S}$ in Σ, und $\mathfrak{f}^*$ hat nach Satz 3 denselben Grad c wie $\mathfrak{f}$ und genügt der Funktionalgleichung von Satz 2. Man kann die Abbildung $\mathfrak{f}^*$ als ein stetiges Feld von Vektoren auf $\mathfrak{S}$ deuten, indem man in jedem Punkte P^* von $\mathfrak{S}$ denjenigen Einheitsvektor angreifen läßt, der parallel ist zu dem Vektor vom Mittelpunkt von Σ nach dem Bilde $\mathfrak{f}^*(P^*)$ auf Σ. Diese Vektoren seien kurz auch als $\mathfrak{f}^*(P^*)$ bezeichnet, das ganze Feld als $\mathfrak{f}^*$. Auf diese Vektoren läßt sich die Operation γ anwenden, und die Funktionalgleichung von Satz 2 ist dann eine solche für das Vektorfeld $\mathfrak{f}^*$ und zeigt, daß es für die Kenntnis des Feldes genügt, das Feld in einem Fundamentalbereich von $\mathfrak{S}$ gegenüber $\mathfrak{G}$ zu kennen.

Um einen solchen zu erhalten, führen wir eine Zellenzerlegung von $\mathfrak{S}$ ein. Die Zellen a^3, a^2, a^1, a^0 3-ter, 2-ter, 1-ter und 0-ter Dimension seien durch folgende Gleichungen und Ungleichungen definiert:

$$\begin{aligned}
a^3&: \quad r_1 > 0,\ 0 < \alpha_1 < \frac{2\pi}{m},\\
a^2&: \quad r_1 > 0,\ 0 = \alpha_1,\\
a^1&: \quad r_1 = 0,\ 0 < \alpha_2 < \frac{2\pi}{m},\\
a^0&: \quad r_1 = 0,\ 0 = \alpha_2,
\end{aligned}$$

immer unter der Nebenbedingung $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Durch Anwendung der g^ν auf diese Zellen erhält man in jeder Dimension m Zellen $g^\nu(a^i)$ $(\nu = 1, \ldots, m;\ i = 0, \ldots, 3)$, welche insgesamt $\mathfrak{S}$ elementfremd und vollständig ausfüllen. Die m Zellen a^i allein bilden einen Fundamentalbereich gegenüber $\mathfrak{G}$.

Nun sei $\mathfrak{g}$ eine zweite Abbildung von $\mathfrak{L}$ in Λ, welche denselben Abbildungsgrad c hat und denselben Homomorphismus der Fundamentalgruppe bewirkt, also denselben Exponenten α hat. $\mathfrak{g}^*$ sei die überlagernde Abbildung der universellen Überlagerung von $\mathfrak{L}$ auf die von Λ. Auch $\mathfrak{g}^*$ sei als Vektorfeld gedeutet, jedoch nicht auf $\mathfrak{S}$, sondern auf einem zweiten Exemplar der universellen Überlagerung von $\mathfrak{L}$, nämlich der zu $\mathfrak{S}$ konzentrischen 3-Sphäre $\mathfrak{T}$ vom Radius $\frac{1}{2}$ mit der Gleichung $r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{4}$. Die Operation g war für den ganzen R_4 erklärt, sie ist also auch für $\mathfrak{T}$ sinnvoll, und die Funktionalgleichung gilt auch für $\mathfrak{g}^*$ an Stelle von $\mathfrak{f}^*$. Eine Zellenzerlegung von $\mathfrak{T}$ erhält man durch die Zellen b^3, b^2, b^1, b^0 und ihre Transformierten $g^\nu(b^i)$, die durch genau dieselben Gleichungen und Ungleichungen definiert werden wie a^3, a^2, a^1, a^0, jedoch mit der Nebenbedingung $r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{4}$. Endlich betrachten wir noch das durch $\frac{1}{4} < r_1^2 + r_2^2 < 1$ erklärte Zwischengebiet $\mathfrak{Z}$ zwischen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$. Auch in $\mathfrak{Z}$ ist g erklärt. $\mathfrak{Z}$ sei durch die „Verbindungszellen" v^4, v^3, v^2, v^1 und ihre Transformierten $g^\nu(v^{i+1})$ zerlegt, welche wiederum durch genau dieselben Gleichungen und Ungleichungen definiert sind wie a^3, a^2, a^1, a^0, nur mit der Nebenbedingung $\frac{1}{4} < r_1^2 + r_2^2 < 1$. v^1 verbindet a^0 geradlinig und radial mit b^0; ähnlich sind v^2, v^3, v^4 als radiale Verbindungen der b- und a-Zellen erklärbar. Die Zellen v^4, v^3, v^2, v^1 allein bilden einen Fundamentalbereich von $\mathfrak{Z}$ gegenüber $\mathfrak{G}$.

Auf $\mathfrak{S}$ ist das Vektorfeld $\mathfrak{f}^*$, auf $\mathfrak{T}$ das Vektorfeld $\mathfrak{g}^*$ erklärt. Beide erfüllen die Funktionalgleichung von Satz 2. Es wird behauptet: Die Felder $\mathfrak{f}^*$ und $\mathfrak{g}^*$ lassen sich stetig zu einem in $\mathfrak{S} + \mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ erklärten Vektorfeld erweitern derart, daß auch in $\mathfrak{S} + \mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ die Funktionalgleichung erfüllt ist. Wenn das gezeigt ist, so ist bewiesen, daß $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ zur gleichen Abbildungsklasse gehören. Zieht man nämlich die Sphäre $\mathfrak{S}$ stetig auf die Sphäre $\mathfrak{T}$ zusammen, indem man die Zwischensphären $\mathfrak{S}_t$ mit $r_1^2 + r_2^2 = t^2$ und $1 \geqq t \geqq \frac{1}{2}$ betrachtet, so ergeben die Vektorfelder auf den $\mathfrak{S}_t$ eine stetige Schar von Abbildungen der $\mathfrak{S}_t$ auf Σ, welche wegen der durchgehenden Gültigkeit der Funktionalgleichung jeweils als Spur in $\mathfrak{L}$ und Λ eine wohlbestimmte Abbildung von $\mathfrak{L}$ in Λ besitzen und auf diese Weise $\mathfrak{f}$ stetig in $\mathfrak{g}$ überführen.

Zum Beweis der Erweiterungsfähigkeit des Vektorfeldes auf $\mathfrak{S} + \mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ werden die beiden folgenden Hilfssätze benötigt. R_n bezeichne den n-dimensionalen euklidischen Raum.

Hilfssatz 1. *Ein auf dem Rande eines k-dimensionalen Elementes im R_n erklärtes stetiges Vektorfeld läßt sich, wenn $k < n$ ist, stets als stetiges Vektorfeld auf das ganze Element erweitern.*

Hilfssatz 2. *Auf dem Rande eines n-dimensionalen Elementes im R_n sei ein stetiges Vektorfeld erklärt, das eine Abbildung vom Grade c dieses Randes auf die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre des R_n vermittelt. Dann und nur dann läßt sich das Feld als stetiges Vektorfeld auf das ganze Element erweitern, wenn $c = 0$ ist.*

Die Beweise dieser Sätze findet man bei H. Hopf [1].

Jetzt werde die von a^0 und b^0 begrenzte Strecke v^1 betrachtet. In a^0 und b^0 ist je ein Vektor $\mathfrak{f}^*(a^0)$, $\mathfrak{g}^*(b^0)$ erklärt. Nach Hilfssatz 1 läßt sich in v^1 ein stetiges Vektorfeld $\mathfrak{v}(v^1)$ erklären, das sich stetig an diese beiden Vektoren anschließt. Dann schließt sich auch das in $g^\nu(v^1)$ zu erklärende Feld $\mathfrak{v}(g^\nu(v^1)) = \mathfrak{f}(g^\nu)(\mathfrak{v}(v^1))$ stetig an die in $g^\nu(v^1)$ und $g^\nu(b^0)$

erklärten Vektoren $\mathfrak{f}^*(g^\nu(a^0)) = \mathfrak{f}(g^\nu)(\mathfrak{f}^*(a^0))$ und $\mathfrak{g}^*(g^\nu(b^0)) = \mathfrak{f}(g^\nu)(\mathfrak{g}^*(b^0))$ an ($\nu = 1, \ldots, m$). Jetzt werde das Flächenstück v^2 betrachtet. Auf seinem Rande ist das durch $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ und $\mathfrak{v}$ gegebene Vektorfeld erklärt. Nach Hilfssatz 1 läßt sich in v^2 ein stetiges Vektorfeld $\mathfrak{v}(v^2)$ erklären, das sich stetig an das Feld auf dem Rande anschließt. Dann schließt sich auch das in $g^\nu(v^2)$ zu erklärende Feld $\mathfrak{v}(g^\nu(v^2)) = \mathfrak{f}(g^\nu)(\mathfrak{v}(v^2))$ stetig an das auf dem Rande von $g^\nu(v^2)$ erklärte Feld an. Ganz entsprechend werde auf $g^\nu(v^3)$ ein stetiges Feld $\mathfrak{v}$ erklärt, das sich stetig an das schon vorhandene Randfeld anschließt und wieder der Funktionalgleichung $\mathfrak{v}(g^\nu(v^3)) = \mathfrak{f}(g^\nu)(\mathfrak{v}(v^3))$ genügt. Endlich sei das Raumstück v^4 betrachtet. Auf dem Rande von v^4 ist nach dem Vorhergehenden durch $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ und $\mathfrak{v}$ ein Vektorfeld erklärt. Dieses Feld möge eine Abbildung vom Grade c_0 des Randes von v^4 auf die 3-Sphäre Σ vermitteln. Dann vermittelt auch das auf dem Rande von $g^\nu(v^4)$ erklärte Feld eine Abbildung vom Grade c_0 auf Σ, da $\mathfrak{f}(g^\nu)$ eine eindeutige, die Orientierung erhaltende Selbstabbildung von Σ vermittelt. Die Vereinigung der m Zellen $g^\nu(v^4)$ ergibt das Zwischengebiet $\mathfrak{Z}$, und das auf dem Rande $\mathfrak{S} + \mathfrak{T}$ von $\mathfrak{Z}$ erklärte Vektorfeld ergibt offenbar eine Abbildung dieses Randes auf Σ, dessen Abbildungsgrad gleich der Summe der genannten Abbildungsgrade ist, also gleich mc_0. Dabei ist zu beachten, daß bei der Feststellung des Abbildungsgrades des Vektorfeldes auf dem Rande von $g^\nu(v^4)$ eine kohärente Orientierung der 3-dimensionalen Randzellen der $g^\nu(v^4)$ zugrunde gelegt werden muß. $g^\nu(b^3)$ wird also entgegengesetzt orientiert, wie es die radiale Übertragung der Orientierung von $g^\nu(a^3)$ ergeben würde. Daher hat die Abbildung von $\mathfrak{S} + \mathfrak{T}$ auf Σ den Grad $c - c = 0$. Es ist also $mc_0 = 0$, also $c_0 = 0$. Daher läßt sich nach Hilfssatz 2 in v^4 ein stetiges Feld erklären, das sich stetig an das Randfeld anschließt. Dann schließen sich auch die Felder $\mathfrak{v}(g^\nu(v^4)) = \mathfrak{f}(g^\nu)(\mathfrak{v}(v^4))$ stetig an ihre Randfelder an. Damit ist im ganzen Gebiet $\mathfrak{Z}$ ein Vektorfeld erklärt, welches sich stetig an das Randfeld anschließt und die Funktionalgleichung von Satz 2 erfüllt. Die Behauptung ist also bewiesen und läßt sich so aussprechen:

Theorem I. *Zwei Abbildungen von $\mathfrak{L}_m(q)$ auf $\Lambda_m(\varkappa)$, die denselben Abbildungsgrad haben und den gleichen Homomorphismus der Fundamentalgruppen vermitteln, gehören zur gleichen Abbildungsklasse.*

Man beachte dabei, daß der den Homomorphismus der Fundamentalgruppen bestimmende Exponent α nicht in demselben Sinne eine Invariante der Abbildung darstellt wie der Grad c. α hängt nämlich von der speziellen Wahl der Erzeugenden g von $\mathfrak{G}$ und γ von Γ ab. Nur bei Abbildungen von $\mathfrak{L}_m(q)$ auf sich selbst kann man von einem eindeutig bestimmten Exponenten α der Abbildung sprechen.

3. Wertbereich der Invarianten.

Der Abbildungsgrad c und der den Homomorphismus der Fundamentalgruppen bestimmende Exponent α sind nicht unabhängig voneinander. Bedingungen ergeben sich aus dem Verschlingungsverhalten der 1-dimensionalen Ketten[3]). — Zunächst sollen Anfangspunkt und Erzeugende der Wegegruppen $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{L}$ und Γ von Λ festgelegt werden. Anfangspunkt für $\mathfrak{G}$ sei der Punkt O mit $r_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Der g entsprechende Weg sei in Übereinstimmung mit Abschnitt 1 so festgesetzt, daß er von O nach dem aus O durch die Deckbewegung g entstehenden Punkt $g(O)$ führt. g sei demgemäß der Weg $r_1 = 0$, $\alpha_2 = 0 \ldots \frac{2\pi}{m} q$. g bezeichne als Element der 1-dimensionalen Homologie-

[3]) Wir folgen hier, mit geringfügigen Modifikationen, M. Rueff[7], von dem auch die Kongruenz (*) und die Konstruktion der Abbildungen mit gegebenen Invarianten stammt.

gruppe auch gleichzeitig die entsprechende 1-dimensionale Kette. Entsprechend sei der Anfangspunkt Ω von Γ und ferner γ festgelegt.

g ist als 1-dimensionale geschlossene Kette homolog zu der durch die Strecke $r_2 = 0$, $0 \leqq \alpha_1 \leqq \frac{2\pi}{m}$ gegebenen Kette g'. Offenbar ist die Schnittzahl $(g', a^2) = 1$, also auch $(g, a^2) = 1$. Ferner ist der Rand $qa = mg$, also a^2 homolog zu $q^{-1}mg$. Dabei bezeichnet q^{-1} die reziproke Restklasse zu q modulo m. Also ist die Verschlingungszahl $[g, q^{-1}g] = 1$, g und $q^{-1}g$ sind duale Basiselemente der eindimensionalen Torsionsgruppe. Entsprechend sind γ und $\varkappa^{-1}\gamma$ in Λ dual.

Nun gilt im Sinne der durch $\mathfrak{f}$ bewirkten homomorphen Abbildung der 1-ten Homologiegruppe $\mathfrak{f}(g) = \alpha\gamma$. Neben diese Gleichung tritt nach dem Hopfschen Umkehrhomomorphismus[4]) φ eine andere, welche eine Abbildung in umgekehrter Richtung für die dualen Ketten liefert, nämlich $\varphi(\varkappa^{-1}\gamma) = \alpha q^{-1}g$ oder $\varphi(\gamma) = \alpha\varkappa q^{-1}g$. Beide hängen zusammen durch die Beziehung $\mathfrak{f}(\varphi(\gamma)) = c\gamma$, die hier

$$\mathfrak{f}(\varphi(\gamma)) = \mathfrak{f}\left(\alpha\frac{\varkappa}{q}g\right) = \alpha^2\frac{\varkappa}{q}\gamma = c\gamma$$

ergibt, woraus

$$(*) \qquad c \equiv \alpha^2\frac{\varkappa}{q} \bmod m$$

folgt. Dies ist die angekündigte Beziehung zwischen c und α.

Man beachte, daß ebenso wie α auch die Form dieser Kongruenz von der speziellen Wahl der Erzeugenden g und γ abhängt. Bei Zugrundelegung von Erzeugenden g' und γ' mit den dualen Ketten xg' und $\xi\gamma'$ ergäbe sich die Kongruenz $c \equiv \alpha^2 x\xi^{-1} \bmod m$.

Es seien nun c und α zwei Zahlen, die die Bedingung (*) erfüllen. Zur Konstruktion einer Abbildung von $\mathfrak{L}$ in Λ mit dem Grade c und dem Exponenten α betrachte man zunächst die Abbildung $\mathfrak{f}^*$ von $\mathfrak{L}^*$ in Λ^*, welche durch

$$\mathfrak{f}^*(r_1) = r_1, \qquad \mathfrak{f}^*(r_2) = r_2$$
$$\mathfrak{f}^*(\alpha_1) = sq\alpha_1, \quad \mathfrak{f}^*(\alpha_2) = s\varkappa\alpha_2$$

mit ganzzahligem s definiert ist. $\mathfrak{f}^*$ führt Punkte, die in bezug auf die Deckbewegungen g^ν äquivalent sind, wieder in äquivalente über, da

$$\mathfrak{f}^*\left(\alpha_1 + \frac{2\pi}{m}\nu\right) = sq\alpha_1 + \frac{2\pi}{m}\nu sq = \mathfrak{f}^*(\alpha_1) + \frac{2\pi}{m}\nu sq,$$
$$\mathfrak{f}^*\left(\alpha_2 + \frac{2\pi}{m}q\nu\right) = s\varkappa\alpha_2 + \frac{2\pi}{m}q\nu s\varkappa = \mathfrak{f}^*(\alpha_2) + \frac{2\pi}{m}\varkappa\nu sq.$$

$\mathfrak{f}^*$ überlagert also eine Abbildung $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{L}$ auf Λ. Für $\nu = 1$ ergibt sich aus den letzten Gleichungen $\mathfrak{f}^*(g(P^*)) = \gamma^{sq}(\mathfrak{f}^*(P^*))$, also $\alpha = sq$. Ferner ist ersichtlich $c = s^2q\varkappa$.

Sei Q ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{L}$, der mit einer abgeschlossenen Kugelumgebung $\mathfrak{U}$ ganz in der Spur der Zelle a^3 liegt. $\mathfrak{V}$ sei eine in $\mathfrak{U}$ enthaltene kleinere Kugelumgebung von Q und $\dot{\mathfrak{U}}$ und $\dot{\mathfrak{V}}$ seien die begrenzenden Kugelflächen von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$. Die Abbildung φ bilde $\mathfrak{U} - \mathfrak{V} + \dot{\mathfrak{V}}$ so auf $\mathfrak{U}$ ab, daß $\dot{\mathfrak{U}}$ punktweise in sich und $\dot{\mathfrak{V}}$ in Q übergeht. Ferner bilde die Abbildung ψ die Kugel $\mathfrak{V}$ so mit dem Grade k auf Σ ab, daß $\mathfrak{V}$ in einen der über $\mathfrak{f}(Q)$ liegenden Punkte übergeht, wie es offenbar möglich ist, und weiter von Σ

---

[4]) H. Hopf [3]. Die hier benutzte Kontragredienz von Abbildung und Umkehrabbildung dualer Ketten ist dort nur für die Bettischen Gruppen und Schnittzahlen ausgesprochen, sie läßt sich aber leicht auf die Torsionsgruppen und Verschlingungszahlen ausdehnen. Für eine ausführliche Begründung siehe M. Rueff [7].

durch Spurbildung auf Λ. Dann wird $\mathfrak{B}$ durch ψ in $\mathfrak{f}(Q)$ abgebildet, und die Abbildung $\mathfrak{f}'$, die in $\mathfrak{B}$ mit ψ, in $\mathfrak{U} - \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{f}\varphi$ und sonst in $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{f}$ übereinstimmt, ist stetig. Der Grad c' von $\mathfrak{f}'$ ist $c' = s^2 q\varkappa + km$, denn die Abbildung durch Spurbildung von Σ auf Λ hat den Grad m. Der Exponent von $\mathfrak{f}'$ ist derselbe $\alpha = sq$ wie der von $\mathfrak{f}$. Da demnach c alle Werte $c \equiv \alpha^2 \frac{\varkappa}{q} \bmod m$ annimmt, ist bewiesen:

Satz 4. *Für den Grad c und den Exponenten α mod m einer Abbildung von $\mathfrak{L}_m(q)$ auf $\Lambda_m(\varkappa)$ gilt bei geeigneter Wahl der Erzeugenden der beiden Fundamentalgruppen $c \equiv \alpha^2 \frac{\varkappa}{q} \bmod m$; zu je zwei Zahlen dieser Art gibt es eine und nur eine Abbildungsklasse.*

Ohne Bezugnahme auf spezielle Erzeugende kann man jedenfalls sagen, daß als Grade alle und nur diejenigen Zahlen c auftreten, die den gleichen quadratischen Restcharakter mod m haben wie $\frac{\varkappa}{q}$. — Bei Abbildungen von $\mathfrak{L}_m(q)$ auf sich selbst hat der Exponent α mod m und damit auch die Kongruenz (*) eine invariante, von der Auswahl der Erzeugenden unabhängige Bedeutung. In diesem Fall gilt:

Satz 5. *Die Klassen der Abbildungen von $\mathfrak{L}_m(q)$ auf sich werden charakterisiert durch genau diejenigen Werte α mod m und c für den Exponent und den Grad, für die $c \equiv \alpha^2 \bmod m$ gilt.*

Unter Umständen gibt es für die Abbildungsklassen einfachere Repräsentanten als die eben angegebenen. Es seien noch besonders diejenigen Abbildungen von $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_m(q)$ auf sich mit $c = \pm 1$ betrachtet. $c = 1$, $\alpha \equiv 1$ charakterisiert die Identität. Für $m > 2$ ist davon verschieden die Klasse mit $c = 1$, $\alpha \equiv -1$. Sie kann repräsentiert werden durch

$$\mathfrak{f}^*(z_1) = \bar{z}_1, \quad \mathfrak{f}^*(z_2) = \bar{z}_2.$$

Man erkennt leicht, daß durch $\mathfrak{f}^*$ in der Tat eine Spurabbildung $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{L}$ auf sich definiert wird, die „Doppelspiegelung" $\mathfrak{s}_0$ von $\mathfrak{L}$, und daß der Grad und der Exponent von $\mathfrak{s}_0$ tatsächlich die angegebenen Werte haben. Ist m eine ungerade Primzahlpotenz, so sind dies die einzigen Klassen mit $c = 1$, sonst gibt es im allgemeinen noch andere.

Der Abbildungsgrad $c = -1$ kann bei Selbstabbildungen von $\mathfrak{L}$ nur auftreten, wenn -1 quadratischer Rest mod m ist. Für m bedeutet das, daß m bis auf den eventuellen Faktor 2 nur aus Primzahlen $\equiv 1 \bmod 4$ zusammengesetzt ist. Nun ist $\mathfrak{L}$ dann und nur dann topologisch symmetrisch, d. h. unter Umdrehung der Orientierung auf sich eineindeutig abbildbar, wenn $q^2 \equiv -1 \bmod m$ (siehe [6])[5]). Eine solche die Orientierung umdrehende Abbildung erhält man wie folgt. Durch die Transformation $z_1 \to z_1$, $z_2 \to \bar{z}_2$ wird $\mathfrak{L}_m(q)$ eineindeutig auf $\mathfrak{L}_m(-q)$ abgebildet, jedoch unter Umdrehung der durch die Einbettung in den 4-dimensionalen Raum vergleichbaren Orientierungen. Durch die Transformation $z_1 \to z_2$, $z_2 \to z_1$ wird $\mathfrak{L}_m(q)$ unter Erhaltung der Orientierung eineindeutig auf $\mathfrak{L}_m(q^{-1})$ abgebildet. Im Falle $q^2 \equiv -1 \bmod m$ sind $\mathfrak{L}_m(-q)$ und $\mathfrak{L}_m(q^{-1})$ identisch, und man erhält durch Zusammenfügung der beiden Abbildungen eine Selbstabbildung von $\mathfrak{L}_m(q)$ in der Form

$$\mathfrak{f}^*(z_1) = z_2, \quad \mathfrak{f}^*(z_2) = \bar{z}_1.$$

Die Gleichungen

---

[5]) Siehe [6], Seite 252. Für höherdimensionale Linsenräume ist dort ein Schreibfehler unterlaufen, der bei dieser Gelegenheit berichtigt sei. Es muß heißen in Zeile 17: „Bei geradem n" anstatt „Bei ungeradem n", in Zeile 18: „$\equiv 1 \bmod 4$" anstatt „$\equiv -1 \bmod 4$", in Zeile 19: „bei ungeradem n" anstatt bei „geradem n".

$$\mathfrak{f}^*\left(\alpha_1 + \frac{2\pi}{m}\right) = \quad \alpha_2 + \frac{2\pi}{m}q = \mathfrak{f}^*(\alpha_1) + \frac{2\pi}{m}q,$$

$$\mathfrak{f}^*\left(\alpha_2 + \frac{2\pi}{m}q\right) = -\alpha_1 - \frac{2\pi}{m} = \mathfrak{f}^*(\alpha_2) + \left(\frac{2\pi}{m}q\right)q$$

zeigen, daß $\mathfrak{f}^*$ in der Tat eine Spurabbildung $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_m(q)$ auf sich definiert, die „Spiegelung" $\mathfrak{s}_1$ von $\mathfrak{L}$. Der Grad der Spiegelung ist $c = -1$, der Exponent nach den letzten beiden Gleichungen $\alpha \equiv q \bmod m$. Wenn m Potenz einer Primzahl $\equiv 1 \bmod 4$ oder das Doppelte einer solchen ist, gibt es außer der Spiegelung und dem durch $c = -1$, $\alpha \equiv -q$ charakterisierten Produkt $\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_0\mathfrak{s}_1$ keine weiteren Selbstabbildungen von $\mathfrak{L}_m(q)$ mit $c = -1$, sonst gibt es im allgemeinen noch andere. Es gilt $\mathfrak{s}_1^2 = \mathfrak{s}_2^2 = \mathfrak{s}_0$ und $\mathfrak{s}_1^4 = \mathfrak{s}_2^4 = \mathfrak{s}_0^2 = 1$.

Für $m = 2$, den projektiven Raum, fällt die Doppelspiegelung in die Klasse der Identität und die Spiegelung ist die einzige Klasse mit $c = -1$. Es gibt für jeden Grad c genau eine Klasse von Selbstabbildungen; bei geradem c ist $\alpha \equiv 0$, bei ungeradem c ist $\alpha \equiv 1 \bmod 2$.

Im Falle der Abbildungen von $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_m(q)$ in sich selbst interessieren im Hinblick auf den folgenden Abschnitt die Fixpunkte. Hier soll nur die Abbildung $\mathfrak{f}_s$ mit $\mathfrak{f}_s^*(\alpha_1) = s\alpha_1$, $\mathfrak{f}_s^*(\alpha_2) = s\alpha_2$ vom Grade $c = s^2$ und vom Exponenten $\alpha \equiv s \bmod m$ betrachtet werden. Die wie oben modifizierte allgemeine Abbildung $\mathfrak{f}_{s,t}$ vom Grade $c = s^2 + km$ wird im folgenden Abschnitt mit einbezogen werden.

Die Fixpunkte von $\mathfrak{f}_s^*$ ergeben sich durch die Gleichungen

$$s\alpha_1 \equiv \alpha_1 \bmod 2\pi, \quad \alpha_1 = \frac{2\pi}{s-1}\lambda,$$

$$s\alpha_2 \equiv \alpha_2 \bmod 2\pi, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{s-1}\mu,$$

$$\mu, \lambda = 1, \ldots, s-1.$$

Das sind je $s-1$ Fixpunkte auf jedem der beiden Gegenkreise $r_2 = 0, r_1 = 1$ und $r_1 = 0, r_2 = 1$ und gewisse aus Fixpunkten bestehende Kreisbögen, die jeden Fixpunkt auf dem einen Gegenkreis mit jedem Fixpunkt auf dem anderen Gegenkreis verbinden. Insgesamt bilden die Fixpunkte eine zusammenhängende Konfiguration $\mathfrak{K}^*$ von $2(s-1)$ Punkten und $(s-1)^2$ bogenförmigen Strecken.

Um die Fixpunkte der Spurabbildung $\mathfrak{f}_s$ zu erhalten, hat man die Punkte F^* von $\mathfrak{L}^*$ aufzusuchen, für die $F^* = g^\nu(\mathfrak{f}_s^*(F^*))$ gilt mit geeignetem $\nu = 1, \ldots, m$. Man erhält die Gleichungen

$$s\alpha_1 \equiv \alpha_1 + \frac{2\pi}{m}\nu \bmod 2\pi, \quad \alpha_1 = \frac{2\pi}{m(s-1)}\nu + \frac{2\pi}{s-1}\lambda,$$

$$s\alpha_2 = \alpha_2 + \frac{2\pi}{m}q\nu \bmod 2\pi, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{m(s-1)}q\nu + \frac{2\pi}{s-1}\mu,$$

$$\mu, \lambda = 1, \ldots, s-1.$$

Für jedes feste ν durchlaufen α_1 und α_2 je alle diejenigen Vielfachen von $\frac{2\pi}{m(s-1)}$, die kongruent $\frac{2\pi}{m(s-1)}\nu$ bzw. $\frac{2\pi}{m(s-1)}q\nu \bmod \frac{2\pi}{s-1}$ sind, also je eine volle Restklasse $\bmod \frac{2\pi}{s-1}$. Für jedes feste ν ergibt sich also wieder eine Konfiguration $\mathfrak{K}^*$ von $2(s-1)$ Punkten und $(s-1)^2$ Strecken. Im ganzen bilden die Fixpunkte m verschiedene Konfigurationen $\mathfrak{K}_\nu^*$, welche den m verschiedenen Restklassen $\bmod \frac{2\pi}{s-1}$ entsprechen. Sie

liegen in $\mathfrak{S}$ miteinander verschlungen und in endlichem Abstand voneinander. Da die Abbildungen $g^{\nu}(\mathfrak{f}_s^*)$ sich auch charakterisieren lassen als die m verschiedenen $\mathfrak{f}_s$ überlagernden Abbildungen, so liefern die Konfigurationen $\mathfrak{K}_\nu^*$ bei der nun zu untersuchenden Spurbildung in $\mathfrak{L}$ zugleich die verschiedenen Fixpunktklassen von $\mathfrak{f}$.

Bei der Spurbildung sind die Konfigurationen $\mathfrak{K}_\nu^*$ modulo der Bewegungsgruppe der g^{ν} zu betrachten. Dazu ist, falls $r_1 > 0$ ist, α_1 und, falls $r_1 = 0$ ist, $\alpha_2 \bmod \frac{2\pi}{m}$ zu rechnen. Zunächst sei ein festes ν, d. h. eine feste Konfiguration $\mathfrak{K}_\nu^*$ ins Auge gefaßt. Dann kommt es auf den zweiten Summanden von α_1, nämlich $\frac{2\pi}{s-1}\lambda \bmod \frac{2\pi}{m}$ an. Es sei der größte gemeinsame Teiler $(s-1, m) = \delta$, $s-1 = \delta s_0$, $m = \delta m_0$, also $(s_0, m_0) = 1$. Dann ist zu untersuchen:

$$\frac{2\pi}{s-1}\lambda \equiv \frac{2\pi m}{m(s-1)}\lambda \equiv \frac{2\pi}{m}\frac{m_0}{s_0}\lambda \bmod \frac{2\pi}{m}.$$

Man erkennt, daß sich s_0 verschiedene Restklassen mod $\frac{2\pi}{m}$ ergeben und je δ Werte von λ zu derselben Restklasse mod $\frac{2\pi}{m}$ führen. α_1 nimmt genau diejenigen s_0 Vielfachen von $\frac{2\pi}{m(s-1)}$ an, die kongruent $\frac{2\pi}{m(s-1)}\nu \bmod \frac{2\pi}{ms_0}$ sind. Da sich im Falle $r_1 = 0$ eine entsprechende Reduktion ergibt, so folgt: Bei der Spurbildung fallen je δ Punkte und je δ^2 Strecken von $\mathfrak{K}_\nu^*$ zusammen und ergeben eine Konfiguration $\mathfrak{K}_\nu$ in $\mathfrak{L}$ von $2\frac{s-1}{\delta}$ Punkten und $\left(\frac{s-1}{\delta}\right)^2$ Strecken.

Jedem $\mathfrak{K}_\nu$ entspricht eine volle Restklasse für α_1 nach dem Modul $\frac{2\pi}{ms_0} = \frac{2\pi}{m(s-1)}\delta$. Da es für α_1 als Vielfaches von $\frac{2\pi}{m(s-1)}$ nur δ Restklassen mod $\frac{2\pi}{ms_0}$ gibt und da ferner im Falle $r_1 = 0$ für α_1 eine entsprechende Einschränkung eintritt, fallen bei der Spurbildung je $\frac{m}{\delta}$ der Konfigurationen $\mathfrak{K}_\nu^*$ zusammen. Es gibt nur δ verschiedene Konfigurationen $\mathfrak{K}_\nu$, welche den δ Restklassen mod $\frac{2\pi}{ms_0}$ für den ersten Summanden $\frac{2\pi}{m(s-1)}\nu$ von α_1 oder auch den δ Restklassen von ν mod δ entsprechen.

Die Fixpunkte von $\mathfrak{f}_s$ verteilen sich also auf δ Konfigurationen $\mathfrak{K}_\nu$ ($\nu \bmod \delta$) von je $2\frac{s-1}{\delta}$ Punkten und $\left(\frac{s-1}{\delta}\right)^2$ Strecken. Diese δ Konfigurationen $\mathfrak{K}_\nu$ stellen zugleich die δ Fixpunktklassen von $\mathfrak{f}_s$ dar. Auch die Indizes dieser Klassen lassen sich leicht berechnen. Modifiziert man nämlich $\mathfrak{f}_s$ so, das r_1 in r_1^2 übergeht, so bleiben nur die beiden Gegenkreise $r_2 = 0, r_1 = 1$ und $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ punktweise fest. Die Fixpunkte der modifizierten Abbildung liegen sämtlich auf diesen beiden Kreisen, und zwar sind es die $2(s-1)$ Eckpunkte der beiden Konfigurationen $\mathfrak{K}_\nu$:

$$\text{für } r_2 = 0\text{: } \alpha_1 \equiv \frac{2\pi}{m(s-1)}\nu \bmod \frac{2\pi}{m},$$

$$\text{für } r_1 = 0\text{: } \alpha_2 \equiv \frac{2\pi}{m(s-1)}\nu \bmod \frac{2\pi}{m},$$

wobei $\nu \bmod s-1$ zu rechnen ist. Je $\frac{s-1}{\delta}$ Fixpunkte auf jedem Kreis gehören zur

gleichen Klasse. Als Indizes der Fixpunkte findet man durch Betrachtung des Vektorfeldes in ihrer Umgebung auf dem einen Kreis den Wert 1, auf dem anderen den Wert s, so daß der Index jeder einzelnen Klasse sich berechnet zu

$$j^* = \frac{s-1}{\delta}1 + \frac{s-1}{\delta}s = \frac{s^2-1}{\delta} = \frac{c-1}{\delta}.$$

Diese Formel werden wir im nächsten Abschnitt allgemein bestätigen.

4. Fixpunktklassen.

Für die Selbstabbildungen von $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_m(q)$ in sich soll nun die Frage nach den Fixpunkten und Fixpunktklassen in den einzelnen Abbildungsklassen allgemein gelöst werden. Zunächst handelt es sich um die algebraische Zahl j aller Fixpunkte, den Fixpunktindex der Abbildung, welcher sich nach der Lefschetz-Hopfschen Spurformel berechnet. Für die Abbildung $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_{s,k}$ mit dem Grade $c = s^2 + km$ aus dem 3. Abschnitt gilt offenbar, wenn man die im 2. Abschnitt eingeführte Zellenzerlegung benutzt:

$$\mathfrak{f}(a^3) = (s^2 + km)a^3,\ \mathfrak{f}(a^2) = sa^2,\ \mathfrak{f}(a^1) = sa^1,\ \mathfrak{f}(a^0) = a^0.$$

Daraus folgt nach der Spurformel

$$j = s^2 + km - 1 = c - 1.$$

Um in analoger Weise die Fixpunktindizes der einzelnen Abbildungsklassen zu berechnen, bemerken wir folgendes. Bei einer Deformation der Abbildung $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{L}$ in die Abbildung $\mathfrak{f}_0$ ändert sich der Fixpunktindex der Abbildung nicht. Es geht ferner jede einzelne Fixpunktklasse von $\mathfrak{f}$ in eine wohlbestimmte Fixpunktklasse von $\mathfrak{f}_0$ über, und die Fixpunktindizes der einzelnen Klassen bleiben dabei unverändert (siehe F. Wecken [8]). Insbesondere läßt sich $\mathfrak{f}$ in eine reguläre simpliziale Abbildung $\mathfrak{f}_0$ deformieren, d. h. eine solche Simplizialabbildung einer hinreichend vielfachen Normalunterteilung $\mathfrak{L}_0$ einer Simplizialteilung $\mathfrak{L}_1$ von $\mathfrak{L}$ in die Simplizialteilung $\mathfrak{L}_1$, daß Fixpunkte von $\mathfrak{f}_0$ nur im Innern von n-dimensionalen Simplizes von $\mathfrak{L}_0$ liegen (siehe H. Hopf [2]). Diejenigen n-dimensionalen Simplizes von $\mathfrak{L}_0$, die einen Fixpunkt enthalten, mögen Fixsimplizes heißen; in einem Fixsimplex liegt genau ein Fixpunkt, und zwar vom Index ± 1. — Faßt man die Simplizes von $\mathfrak{L}_1$ als Ketten von Simplizes von $\mathfrak{L}_0$ auf, so führt die Abbildung $\mathfrak{f}_0$ zu einer Abbildung des Kettenringes von $\mathfrak{L}_0$ in sich. Betrachtet man insbesondere die Abbildung einer Basis der k-dimensionalen Ketten, so erhält man für jede Dimension eine quadratische Abbildungsmatrix, welche die Kettenabbildung charakterisiert. Die Bildkette $\mathfrak{f}_0(\Delta)$ eines Simplex Δ enthält dann und nur dann Δ selbst, wenn Δ Fixsimplex ist, und zwar mit dem Vorzeichen ± 1 je nach dem Index des Fixpunktes. Die Spur der n-dimensionalen Abbildungsmatrix ergibt daher gerade den gesamten Fixpunktindex der Abbildung, während die Spuren der übrigen Abbildungsmatrizen Null sind. Da die aus den sämtlichen Spuren gebildete Lefschetz-Hopfsche Spureninvariante unabhängig von einer Transformation der Basis und von Erweiterungen und Reduktionen des Kettenringes ist, kann man mit ihrer Hilfe auch bei einer *beliebigen*, nicht notwendig regulären Simplizialabbildung den Fixpunktindex an einer *beliebigen* Kettenbasis ablesen.

Sei nun die Selbstabbildung $\mathfrak{f}^*$ von $\mathfrak{L}^*$ eine der überlagernden Abbildungen von $\mathfrak{f}$ [6]).

---

[6]) Die folgenden Betrachtungen über die Reidemeistersche Spureninvariante verlaufen im Anschluss an K. Reidemeister [5]; gegenüber dem dortigen allgemeinen Fall treten hier wegen der Kommutativität der Fundamentalgruppen einige Vereinfachungen ein.

Die Spur eines jeden Fixpunktes von $\mathfrak{f}^*$ ist auch Fixpunkt von $\mathfrak{f}$, und alle so aus einer überlagernden Abbildung $\mathfrak{f}^*$ entstehenden Fixpunkte von $\mathfrak{f}$ bilden eine Fixpunktklasse von $\mathfrak{f}$. $\mathfrak{f}^*$ heiße eine zu dieser Klasse gehörende überlagernde Abbildung, die Fixpunktklasse heiße zu $\mathfrak{f}^*$ gehörig. Der Begriff der Fixpunktklasse ist dabei in bezug auf die Überlagerung $\mathfrak{L}^*$ gebraucht; im allgemeinen ist $\mathfrak{L}^*$ als universelle Überlagerung anzunehmen, dann handelt es sich um die gewöhnlichen Fixpunktklassen. — Da $\mathfrak{f}_0$ eine reguläre Simplizialselbstabbildung von $\mathfrak{L}^*$ ist, ist auch $\mathfrak{f}_0^*$, die entsprechend aus $\mathfrak{f}^*$ durch Deformation hervorgehende überlagernde Abbildung von $\mathfrak{f}_0$, eine reguläre Simplizialselbstabbildung der entsprechenden Simplizialteilung $\mathfrak{L}_0^*$ von $\mathfrak{L}^*$. $\mathfrak{f}_0^*$ vermittelt eine Abbildung des zu $\mathfrak{L}_0^*$ gehörigen Homotopiekettenringes (siehe [5], [6]) in sich. Die Abbildung einer Basis des Homotopiekettenringes führt wieder zu $n+1$ quadratischen Abbildungsmatrizen, deren Elemente nunmehr dem Gruppenring von $\mathfrak{G}$ angehören. Ist Δ^* ein n-dimensionales Simplex von $\mathfrak{L}_0^*$, welches als Basiselement in einer Grundbasis (vgl. [6]) ausgewählt ist, so ist Δ^* dann und nur dann Fixsimplex, wenn der Koeffizient von Δ^* in $\mathfrak{f}_0^*(\Delta^*)$ gleich 1 ist. $g^\nu(\Delta^*)$ geht bei $\mathfrak{f}_0^*$ nach der Funktionalgleichung von Satz 2 in $\mathfrak{f}(g^\nu)(\mathfrak{f}_0^*(\Delta^*))$ über, $g^\nu(\Delta^*)$ ist also dann und nur dann Fixsimplex, wenn der Koeffizient von Δ^* in $\mathfrak{f}(g^\nu)(\mathfrak{f}^*(\Delta^*))$ gleich g^ν ist, oder mit anderen Worten, wenn der Koeffizient von Δ^* in $\mathfrak{f}_0^*(\Delta^*)$ gleich $\mathfrak{f}(g^{-\nu})g^\nu$ ist. Die sämtlichen Elemente $\mathfrak{f}(g^{-\nu})g^\nu$ bilden wegen der Kommutativität von $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{G}$. Δ, das Spursimplex von Δ^* in $\mathfrak{L}$ ist dann und nur dann Fixsimplex zu einem Fixpunkt der zu $\mathfrak{f}^*$ gehörigen Fixpunktklasse, wenn mindestens eins der über Δ gelegenen Simplizes $g^\nu(\Delta^*)$ Fixsimplex ist, d. h. wenn der Koeffizient von Δ^* in $\mathfrak{f}^*(\Delta^*)$ in die Gruppe $\mathfrak{J}$ fällt. Die Anzahl der Fixsimplizes Δ dieser Art und damit den Fixpunktindex j^* der Fixpunktklasse erhält man also als die Anzahl derjenigen Summanden der Spur σ^* der n-ten Abbildungsmatrix, die nach $\mathfrak{J}$ fallen. Da die Reidemeistersche Spureninvariante σ^* des Homotopiekettenringes, nämlich die alternierende Summe der Spuren der Abbildungsmatrizen, unabhängig ist von einer Transformation der Basis und von Erweiterungen und Reduktionen des Homotopiekettenringes, kann man mit ihrer Hilfe auch bei einer *beliebigen*, nicht notwendig regulären Simplizialabbildung den Fixpunktindex j^* an einer *beliebigen* Basis des Homotopiekettenringes ablesen. j^* ist gleich der Anzahl derjenigen Summanden von σ^*, die nach $\mathfrak{J}$ fallen.

Wir kehren nun zur Untersuchung der Abbildung $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_{s,k}$ vom Grade $c = s^2 + km$ und vom Exponenten $\alpha \equiv s \bmod m$ von $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_m(q)$ zurück. Zunächst werde die Gruppe $\mathfrak{J}$ aufgestellt. Da $\mathfrak{f}(g) = g^s$, wird $\mathfrak{J}$ durch $\mathfrak{f}(g^{-1})g = g^{1-s}$ erzeugt. Ist der größte gemeinsame Teiler $(s-1, m) = (\alpha - 1, m) = \delta$, so wird $\mathfrak{J}$ auch durch g^δ erzeugt. $\mathfrak{J}$ hat den Index δ in $\mathfrak{G}$ und die Ordnung $\frac{m}{\delta}$.

Für die Abbildungsmatrizen ergibt sich nach der Konstruktion von $\mathfrak{f}^*$ im 3. Abschnitt und bei Benutzung der Zellenteilung des 2. Abschnittes:

$$\mathfrak{f}^*(a^3) = s(1 + g + \cdots + g^{q-1})\, a^3 + k(1 + g + \cdots + g^{m-1})a^3,$$
$$\mathfrak{f}^*(a^2) = sa^2,\ \mathfrak{f}^*(a^1) = (1 + g^{q^{-1}} + \cdots + g^{q^{-1}(s-1)})a^1,\ \mathfrak{f}^*(a^0) = a^0.$$

Bei der Berechnung von $\mathfrak{f}^*(a^1)$ beachte man, daß nach den Festsetzungen des 3. Abschnittes die Punkte $r_1 = 0, \alpha_2 = \frac{2\pi}{m}\nu$ als $g^\nu q^{-1}(a^1)$ zu bezeichnen sind. Daraus folgt für die Reidemeistersche Spureninvariante

$$\sigma^* = s(1 + \cdots + g^{q-1}) + k(1 + \cdots + g^{m-1}) + (1 + \cdots + g^{q^{-1}(s-1)}) - s - 1,$$
$$= s(g + \cdots + g^{q-1}) + (g^{q^{-1}} + \cdots + g^{q^{-1}(s-1)}) + k\,(1 + \cdots + g^{m-1}).$$

Von jeder Klammer fällt der δ-te Teil der Summanden nach $\mathfrak{J}$. Man beachte dabei, daß $(q, m) = 1$. Daher wird der Fixpunktindex

$$j^* = \frac{1}{\delta}(s(s-1) + s - 1 + km) = \frac{1}{\delta}(s^2 + km - 1) = \frac{c-1}{\delta}.$$

Für die übrigen überlagernden Abbildungen zu $\mathfrak{f}$, also die übrigen Abbildungsklassen ergibt sich aus Symmetriegründen dasselbe Resultat. σ^* und damit auch j^* ist dann und nur dann Null, wenn $c = 1$ ist. Es ist also bewiesen:

Theorem II. *Eine Abbildung von $\mathfrak{L}_m(q)$ in sich vom Grade c und vom Exponenten α besitzt $c-1$ Fixpunkte, welche sich für $c \neq 1$ gleichmäßig auf $\delta = (\alpha - 1, m)$ Fixpunktklassen vom Index $\frac{c-1}{\delta}$ verteilen.*

Nach F. Wecken [8] kann man die Abbildung $\mathfrak{f}$ so deformieren, daß sie nur δ Fixpunkte mit je dem Index $\frac{c-1}{\delta}$ hat.

Es sollen noch die Fixpunktklassen für die oben betrachtete Doppelspiegelung $\mathfrak{s}_0$ und im Falle $q^2 \equiv -1 \bmod m$ für die beiden Spiegelungen $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ von $\mathfrak{L}_m(q)$ aufgestellt werden. Bei der Doppelspiegelung ist $c = 1$, also $j = 0$. Jede der beiden Spiegelungen hat die beiden Fixpunkte

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2\pi}{2m}$$

vom Index -1. In der Tat ist $c = -1$, $j = -2$. Berücksichtigt man, daß m ungerade oder das Doppelte einer ungeraden Zahl ist so findet man für

$$\delta = (\alpha - 1, m) = (\pm q - 1, m),$$

da $(\pm q - 1)^2 \equiv \mp 2q \bmod m$ und $(q, m) = 1$, daß nur $\delta = 1$ oder $\delta = 2$ sein kann. Bei ungeradem m ist $\delta = 1$, bei geradem m ist q ungerade, $\pm q - 1$ also gerade, $\delta = 2$. Je nachdem m ungerade oder gerade ist, gehören die beiden Fixpunkte zur gleichen oder zu verschiedenen Klassen.

Für den Fall $m = 2$, den projektiven Raum, folgt, daß die Abbildungsklassen mit geradem c, also $\alpha \equiv 0 \bmod 2$, $\delta = 1$ *eine* Fixpunktklasse vom Index $c-1$, die Abbildungsklassen mit ungeradem c, also $\alpha \equiv 1 \bmod 2$, $\delta = 2$, mit Ausnahme der Klasse der Identität *zwei* Fixpunktklassen je mit dem Index $\frac{c-1}{2}$ besitzen.

Literaturverzeichnis.

[1] H. Hopf, Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. **96** (1927), 209—224.
[2] —, Über die algebraische Zahl von Fixpunkten, Math. Zeitschr. **29** (1929), 493—524.
[3] —, Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **163** (1930), 71—88
[4] K. Reidemeister, Homotopieringe und Linsenräume, Abh. Math. Sem. Hamburg **11** (1935), 102—109.
[5] —, Automorphismen von Homotopieketten ringen, Math. Ann. **112** (1935), 102—109.
[6] W. Franz, Über die Torsion einer Überdeckung, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **173** (1935), 245—254.
[7] M. Rueff, Beiträge zur Untersuchung der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Diss. Zürich 1938 = Com. Math. **6** (1938), 161—202.
[8] F. Wecken, Fixpunktklassen. I., Math. Ann. **117** (1941), 659—671.

Eingegangen am 22. September 1941.

Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. IV.

Über algebraische Regelflächen vom Grade 2n mit zwei n-fachen Leitgeraden (n = 3, 4, 5, 6).

Von *G. Haenzel* und *F. Reutter* in Karlsruhe.

Die algebraischen Regelflächen von fünftem und höherem Grade sind der Untersuchung schwer zugänglich und eine einigermaßen vollständige Klassifikation reicht über die Regelflächen fünften[1]) und sechsten[2]) Grades nicht hinaus. Im folgenden werden Büschel von Regelflächen sechsten, achten, zehnten und zwölften Grades mit zwei (reellen oder konjugiert imaginären) windschiefen Leitgeraden behandelt. Ihre Regelscharen liegen in der (hyperbolischen oder elliptischen) linearen Kongruenz. Die Untersuchung dieser sehr komplizierten Objekte wird durch die Abbildung der elliptischen und der hyperbolischen Kongruenz auf die komplexe oder die dualkomplexe Ebene ermöglicht. Die Bildkurven der Regelscharen stehen in engen Beziehungen zu den kubischen und biquadratischen Funktionen einer (komplexen oder dualkomplexen) Veränderlichen und deren Kovarianten.

Im Abschnitt I A werden aus geometrischen Theoremen[3]) über die Kovariantensysteme kubischer und biquadratischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen neue Sätze über Büschel algebraischer Kurven höherer Ordnung und ihre Orthogonalbüschel entwickelt als notwendige Basis für die späteren liniengeometrischen Resultate. Diese bisher unbekannten zirkularen Kurven fünfter, sechster, achter, neunter, zehnter und zwölfter Ordnung sind nämlich die Bildkurven algebraischer Regelflächen sechsten, achten, zehnten und zwölften Grades mit zwei konjugiert imaginären windschiefen Leitgeraden (Abschnitt II A). Die Teile I B und II B behandeln algebraische Regelflächen sechsten, achten, zehnten und zwölften Grades mit zwei reellen windschiefen Leitgeraden und ihre Bildkurven im Zusammenhang mit den Kovariantensystemen kubischer und biquadratischer Funktionen der dualkomplexen Ebene. Im Laufe der Untersuchung zeigt sich, daß die lineare Kongruenz Vierergruppen von Involutionen besitzt; diese haben die bemerkenswerte Eigenschaft, die ∞^1 Regelscharen zweier konjugierter Büschel von Regelflächen achten Grades invariant zu lassen.

---

[1]) H. A. Schwarz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 67 (1867), S. 23.

[2]) V. Snyder, Am. Journ. of Math. 25 (1903) S. 59—96, 261—268, 27 (1905) S. 77—102, 173—188.

[3]) G. Haenzel, Über ganze rationale Funktionen, Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Ges. 28 (1929), S. 41—45.

Die Abhandlung ist entstanden im Anschluß an eine Reihe von Arbeiten über die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz[4]), von deren Methoden und Ergebnissen hier häufig Gebrauch gemacht wird.

I. Büschel zirkularer Kurven höherer Ordnung.

A. Zirkulare Kurven der euklidischen Ebene.

1. Die kubische Funktion $w = f_3(z)$ hat eine Hessesche Kovariante $H(z)$ vom zweiten Grade und eine Jacobische Kovariante $J(z)$ vom dritten Grade. Wir setzen zwei voneinander verschiedene Nullstellen z_I, z_{II} von $H(z)$ voraus, so daß ein Kreis H^2 über $z_I z_{II}$ als Durchmesser bestimmt ist (Fig. 1). Die Inversion an diesem Kreise und die Spiegelung an der Geraden $z_I z_{II}$ vertauscht die Nullstellen z_1, z_2, z_3 von $f_3(z)$ mit den Nullstellen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ von $J(z)$. Die Nullstellendreiecke von $f_3(z)$ und $J(z)$ haben einen gemeinsamen Umkreis R^2, der zum Kreisbüschel durch z_I, z_{II} orthogonal ist. Die apollonischen Kreise R_1^2, R_2^2, R_3^2 des Nullstellendreiecks $z_1 z_2 z_3$ von $f_3(z)$ schneiden den Umkreis R^2 rechtwinklig in den drei Nullstellen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ von $J(z)$ und schneiden einander in den beiden Nullstellen z_I, z_{II} von $H(z)$. Die beiden Nullstellen z_I, z_{II} sind die isodynamischen Punkte des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$.

2. Die drei Punkte z_1, z_2, z_3 bedingen aber nicht nur die beiden Punktegruppen z_I, z_{II} und $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ elementargeometrisch, sondern sie bestimmen auch die drei Transformationen:

$$w = \frac{f_3(z),}{H(z)} \quad w = \frac{J(z),}{z \cdot H(z)} \quad w = \frac{f_3(z)}{J(z)}.$$

Werden die beiden Nullstellen von $H(z)$ nach $+1, -1$ verlegt, so ergeben sich die Darstellungen:

$$f_3(z) = z^3 + 3(p + iq)z^2 + 3z + p + iq\,,$$
$$J(z) = (p + iq)z^3 + 3z^2 + 3(p + iq)z + 1\,,$$
$$H(z) = z^2 - 1\,.$$

a) Die Transformation $w = \dfrac{f_3(z)}{H(z)}$ verwandelt die w-Geraden durch den Anfangspunkt 0 in einen Büschel B_1^5 von ∞^1 Kurven fünfter Ordnung und sie bildet die konzentrischen w-Kreise um den Anfangspunkt in einen Büschel B_2^6 von ∞^1 Kurven sechster Ordnung ab. Die Gleichungen der beiden Büschel lauten in Polarkoordinaten r, φ:

$$(1)\quad B_1^5\Big\{ \begin{aligned}&[r^4 - 2r^2(1 + 2\cos^2\varphi) - 8\,pr\cos\varphi - 3]r\sin\varphi + (q + \lambda p)[3r^4 - 2r^2\cos 2\varphi - 1] \\ &+ \lambda[r^4 + 2r^2(1 + 2\sin^2\varphi) + 8qr\sin\varphi - 3]r\cos\varphi = 0\end{aligned}$$

$$(2)\quad B_2^6\Big\{ \begin{aligned}&r^6 + 6r(r^4 + 1)(p\cos\varphi + q\sin\varphi) + 6r^2(r^2 + p^2 + q^2)\cos 2\varphi + 9r^4(p^2 + q^2) \\ &+ 12r^3(p\cos\varphi - q\sin\varphi) + 8r^3(p\cos^3\varphi - q\sin^3\varphi) + 9r^2 + p^2 - q^2 \\ &+ \lambda[r^4 - 2r^2\cos 2\varphi + 1] = 0\end{aligned}$$

---

[4]) G. Haenzel, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. I., Journ. f. d. reine u. angew. Math. 178 (1935), S. 91—113; G. Haenzel, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. II., Journ. f. d. reine u. angew. Math. 175 (1936), S. 169—181; G. Haenzel u. F. Reutter, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. III., Journ. f. d. reine u. angew. Math. 178 (1938), S. 229—252; G. Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 166 (1932), S. 167—181.

oder

$$f(r, \varphi) + \lambda h(r, \varphi) = 0 .$$

Die ∞^1 Kurven fünfter Ordnung des Büschels B_1^5 gehen je zweimal durch beide Kreispunkte und sie berühren einander in ihnen. Diese Punkte sind also sechsfache Knotenpunkte des Büschels. Der Büschel hat außerdem die drei Nullstellen von $f_3(z)$ und die beiden Nullstellen von $H(z)$ zu reellen einfachen Knotenpunkten. Seine übrigen acht Knotenpunkte sind imaginär und zählen i. a. einfach. Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des Orthogonalbüschels B_2^6 gehen je dreimal durch beide Kreispunkte. Der Büschel hat nur konjugiert imaginäre Knotenpunkte. Jede der ∞^1 Kurven fünfter Ordnung des Büschels B_1^5 hat eine Asymptote; die ∞^1 Asymptoten bilden den Strahlenbüschel erster Ordnung mit der Gleichung

$$y = -\lambda x - 3p\lambda - 3q .$$

b) Die Transformation $w = \dfrac{J(z)}{zH(z)}$ bildet die Geraden durch den Anfangspunkt 0 der w-Ebene auf die ∞^1 Kurven sechster Ordnung eines Büschels $B_1'^6$ ab und die konzentrischen w-Kreise um den Anfangspunkt auf die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des orthogonalen Büschels $B_2'^6$. Ihre Gleichungen sind:

$$(3)\quad B_1'^6 \begin{cases} [3r^4 + 2r^2(1 + 2\cos^2\varphi) + 8pr^3\cos\varphi - 1]r\sin\varphi - (q + \lambda p)r^3\,[r^4 + 2r^2\cos 2\varphi - 3] \\ \quad - \lambda[3r^4 - 2r^2(1 + 2\sin^2\varphi) - 8qr^3\sin\varphi - 1]r\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

$$(4)\quad B_2'^6 \begin{cases} (p^2 + q^2)r^6 + 6r(r^4 + 1)(p\cos\varphi - q\sin\varphi) + 6r^2(p^2r^2 + q^2r^2 + 1)\cos 2\varphi + 9r^4 \\ \quad + 12r^3(p\cos\varphi + q\sin\varphi) + 8r^3(p\cos^3\varphi + q\sin^3\varphi) + 9(p^2 + q^2)r^2 + 1 \\ \quad + \lambda r^2[r^4 - 2r^2\cos 2\varphi + 1] = 0 \end{cases}$$

oder

$$j(r, \varphi) + \lambda r^3 h(r, \varphi) = 0 .$$

Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des Büschels $B_1'^6$ gehen je dreimal durch beide Kreispunkte; die drei Nullstellen von $J(z)$, der Punkt $x = y = 0$ und die beiden Nullstellen von $H(z)$ sind die reellen Knotenpunkte des Büschels. Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des Orthogonalbüschels $B_2'^6$ sind gleichfalls dreifach zirkular. Der Büschel hat nur imaginäre Knotenpunkte.

c) Die Transformation $w = \dfrac{f_3(z)}{J(z)}$ verwandelt den Geradenbüschel durch den Anfangspunkt der w-Ebene und den Büschel konzentrischer Kreise in zwei zueinander orthogonale Büschel B_3^6, B_4^6 von dreifach zirkularen Kurven sechster Ordnung mit den Gleichungen:

$$(5)\quad B_3^6 \begin{cases} qr^6 + 3(p^2 + q^2 - 1)r(r^4 + 1)\sin\varphi - (9qr^2 - 6qr^2\cos 2\varphi)(r^2 - 1) \\ \quad - (p^2 + q^2 - 1)r^3\sin\varphi\,(6 + 4\sin^2\varphi) - q \\ + \lambda[pr^6 + 3(p^2 + q^2 + 1)(r^4 + 1)r\cos\varphi + (9pr^2 + 6pr^2\cos 2\varphi)(r^2 + 1) \\ \quad + (p^2 + q^2 + 1)r^3\cos\varphi(6 + 4\cos^2\varphi) + p] = 0 \end{cases}$$

$$(6)\quad B_4^6 \qquad f(r, \varphi) + \lambda j(r, \varphi) = 0 ,$$

$f(r,\varphi)$ siehe Gleichung (2), $j(r,\varphi)$ siehe Gleichung (4).

Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des Büschels B_3^6 sind dreifach zirkular; die drei

Nullstellen von $f_3(z)$ und die drei Nullstellen von $J(z)$ sind die reellen Knotenpunkte des Büschels B_3^6; seine restlichen Knotenpunkte sind imaginär. Der Büschel B_4^6 besteht gleichfalls aus dreifach zirkularen Kurven sechster Ordnung, hat aber nur paarweise koujugiert imaginäre Knotenpunkte. Die Kurven beider Büschel haben keine reellen Asymptoten.

3. Die Transformation $z' = \frac{1}{z}$ tauscht nach Nr. 1 die drei Nullstellen von $f_3(z)$ mit den drei Nullstellen von $J(z)$. Sie vertauscht $w = \frac{f_3(z)}{H(z)}$ mit $w = \frac{J(z)}{zH(z)}$ und $w = \frac{f_3(z)}{J(z)}$ mit $w = \frac{J(z)}{f_3(z)}$. Hieraus folgert man mit Hilfe von Nr. 2:

Die Spiegelung am Einheitskreise und an der reellen Achse vertauscht die Kurvenbüschel B_1^5 und B_2^6 bzw. mit den Kurvenbüscheln $B_1'^6$ und $B_2'^6$. Sie führt den Büschel B_3^6 in sich über, indem sie seine ∞^1 Kurven untereinander vertauscht und in gleicher Weise tauscht sie die ∞^1 Kurven des Büschels B_4^6 untereinander aus. Im Büschel B_3^6 bleiben die beiden Kurven mit den Parameterwerten $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ einzeln fest, im Büschel B_4^6 die Kurven mit den Parameterwerten $\lambda = \pm 1$.

4. Die biquadratische Funktion

$$f_4(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4$$

hat die Hessesche Kovariante $H(z)$ vom vierten Grade und die Jacobische Kovariante $J(z)$ vom sechsten Grade sowie zwei Invarianten i, k. Mit Hilfe der Lösungen m_1, m_2, m_3 der kubischen Resolvente $m^3 - \frac{i}{2} m - k = 0$ wird $J(z)$ in drei quadratische Faktoren φ, χ, ψ gespalten:

$$(7) \quad \begin{cases} H(z) + m_1 f_4(z) = -2\varphi^2, \quad H(z) + m_2 f_4(z) = -2\chi^2, \quad H(z) + m_3 f_4(z) = -2\psi^2, \\ J(z) = 2\varphi\chi\psi. \end{cases}$$

Die sechs Nullstellen von $J(z)$ werden dadurch in drei Paare $\delta_1\delta_2$, $\delta_3\delta_4$, $\delta_5\delta_6$ geordnet. Sowohl die vier Nullstellen von $f_4(z)$ als auch die vier Nullstellen von $H(z)$ gehen je paarweise ineinander über durch Inversion an jedem der drei Kreise über der Verbindungsstrecke eines Nullstellenpaares von $J(z)$ als Durchmesser und durch Spiegelung an diesem Durchmesser[5]). Daraus ergibt sich eine elementargeometrische Konstruktion der sechs Nullstellen von $J(z)$ aus denen von $f_4(z)$ oder von $H(z)$. Die drei Nullstellenpaare von $J(z)$ sind die drei Schnittpunktepaare dreier einander senkrecht schneidender Kreise. Die drei durch $f_4(z)$ (mit Hilfe der drei Nullstellenpaare von $J(z)$) gegebenen Vertauschungstransformationen bilden mit der Identität die Vierergruppe.

5. Die vier Nullstellen von $f_4(z)$ bestimmen aber nicht nur die soeben geometrisch charakterisierten Punktegruppen der Nullstellen von $J(z)$ und $H(z)$, sondern auch die gebrochenen rationalen Transformationen, die sich durch Kombination von je zweien dieser Formen bilden lassen:

$$w = \frac{f_4(z)}{H(z)}, \quad w = \frac{J(z)}{f_4(z)}, \quad w = \frac{J(z)}{H(z)}.$$

a) Erhält $f_4(z)$ die „Normalform“:

$$f_4^0(z) = z^4 + 6(\alpha + i\beta)z^2 + 1,$$

---

[5]) G. Haenzel, Über ganze rationale Funktionen, Sitz.Ber. d. Berl. Math. Ges. 28 (1929), S. 31—45.

so liegen die drei Nullstellenpaare von $J(z)$ in $0, \infty; +1, -1; +i, -i$ mit

$$J(z) = z^5 - z \text{ und } H(z) = z^4 + \frac{1-3(\alpha+i\beta)^2}{\alpha+i\beta} z^2 + 1 .$$

Die durch die drei Nullstellenpaare von $J(z)$ bedingten drei Inversionen mit Spiegelungen sind dargestellt durch:

$$J_1: z' = \frac{1}{z}, \quad J_2: z' = -\frac{1}{z}, \quad J_3: z' = -z .$$

Die Transformation $w = \frac{f_4(z)}{H(z)}$ bildet den Büschel der w-Geraden durch den Anfangspunkt und den Büschel der konzentrischen Kreise um diesen Punkt in zwei orthogonale Büschel B_1^8, B_2^8 von Kurven achter Ordnung ab mit den Gleichungen:

$$(8)\ B_1^8 \begin{cases} \beta(9\alpha^2+9\beta^2+1)(r^4+1)r^2\cos 2\varphi - \alpha(9\alpha^2+9\beta^2-1)(r^4-1)r^2\sin 2\varphi \\ +12\alpha\beta r^4 + \lambda\{\alpha(1+3\alpha^2+3\beta^2)(r^4+1)r^2\cos 2\varphi + \beta(3\alpha^2+3\beta^2-1)(r^4-1)r^2\sin 2\varphi \\ +6(\alpha^2-\beta^2-3(\alpha^2+\beta^2)^2)r^4 + (\alpha^2+\beta^2)\,[(r^4+1)^2 - 4r^4\sin^2 2\varphi]\} = 0 \end{cases}$$

$$(9)\ B_2^8 \begin{cases} r^8 + 2(1+18\alpha^2+18\beta^2)r^4 + 12\alpha(r^4+1)r^2\cos 2\varphi + 12\beta(r^4-1)r^2\sin 2\varphi \\ -4r^4\sin^2 2\varphi + 1 + \lambda\Big\{r^8 + \frac{2}{(\alpha^2+\beta^2)^3}(18-107\alpha^2+109\beta^2+162(\alpha^2+\beta^2)^2)r^4 \\ +\frac{12\alpha}{\alpha^2+\beta^2}(1-3\alpha^2-3\beta^2)(r^4+1)r^2\cos 2\varphi \\ -\frac{12\beta}{\alpha^2+\beta^2}(1+3\alpha^2+3\beta^2)(r^4-1)r^2\sin 2\varphi - 4r^4\sin^2 2\varphi + 1\Big\} = 0 \end{cases}$$

oder

$$F(r,\varphi) + \lambda H(r,\varphi) = 0.$$

Die ∞^1 Kurven achter Ordnung des Büschels B_1^8 und ebenso die ∞^1 Kurven achter Ordnung des orthogonalen Büschels B_2^8 sind vierfach zirkular. Die reellen Knotenpunkte des Büschels B_1^8 sind die vier Nullstellen von $f_4(z)$ und die vier Nullstellen von $H(z)$. Seine übrigen Knotenpunkte sind paarweise konjugiert imaginär. Der Büschel B_2^8 hat keine reellen Knotenpunkte.

Durch jede der drei Inversionen und Spiegelungen J_1, J_2, J_3 geht jede Kurve achter Ordnung der Büschel B_1^8, B_2^8 in sich über.

b) Erhält die biquadratische Funktion die Form

$$f_4(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1 ,$$

so liegen die drei Nullstellenpaare von $J(z)$ in $+1, -1$; $A, \frac{1}{A}$; $B, \frac{1}{B}$. A, B hängen algebraisch von a, b ab. Die drei Inversionen und Spiegelungen J_i haben die Gleichungen:

$$z' = \frac{1}{z}, \quad z' = \frac{(1+A^2)z - 2A}{2Az - (1+A^2)}, \quad z' = \frac{2Az - (1+A^2)}{(1+A^2)z - 2A}.$$

Die Transformation $w = \frac{J(z)}{f_4(z)}$ bildet die Geraden und Kreise durch bzw. um den Anfangspunkt der w-Ebene auf zwei Orthogonalbüschel B_0^{10}, $B_0'^{12}$ von ∞^1 Kurven zehnter bzw. zwölfter Ordnung ab. Die Kurven des Büschels B_0^{10} sind fünffach zirkular, die des

Büschels $B_0'^{12}$ sechsfach zirkular. Der Büschel B_0^{10} hat die vier Nullstellen von $f_4(z)$ und die sechs Nullstellen von $J(z)$ zu reellen Knotenpunkten, alle übrigen vierzig Knotenpunkte sind konjugiert imaginär. Der Büschel $B_0'^{12}$ hat nur konjugiert imaginäre Knotenpunkte.

Durch die drei Inversionen und Spiegelungen J_i gehen die beiden orthogonalen Kurvenbüschel B_0^{10}, $B_0'^{12}$ in die drei Paare orthogonaler Büschel von Kurven zwölfter Ordnung über:

$$B_1^{12},\ B_1'^{12};\ B_2^{12},\ B_2'^{12};\ B_3^{12},\ B_3'^{12}.$$

Durch die drei Transformationen

$$w = -\frac{J(z)}{z^2 f_4(z)},\quad w = -\frac{J(z)(A^2-1)^2}{(2Az-(1+A^2)^2)f_4(z)},\quad w = \frac{J(z)(A^2-1)^2}{((1+A^2)z-2A)^2 f_4(z)}$$

werden diese drei Büschelpaare B_i^{12}, $B_i'^{12}$ von Kurven zwölfter Ordnung je als die Bilder der Geraden durch den Anfangspunkt und der Kreise um den Anfangspunkt der w-Ebene unmittelbar erhalten.

Die Kurven sämtlicher Büschel sind sechsfach zirkular. Die drei Kurvenbüschel B_i^{12} haben die vier Nullstellen von $f_4(z)$ und die sechs Nullstellen von $J(z)$ zu einfachen (reellen) Knotenpunkten. Die ∞^1 Kurven des Büschels B_1^{12} haben außerdem den Punkt $z=0$ zum Doppelpunkt, die ∞^1 Kurven des Büschels B_2^{12} den Punkt $z=\frac{A^2+1}{2A}$ und die ∞^1 Kurven des Büschels B_3^{12} den Punkt $z=\frac{2A}{A^2+1}$. Die drei Kurvenbüschel $B_i'^{12}$ haben durchweg konjugiert imaginäre Knotenpunkte.

c) Tritt an Stelle von $w=\frac{J(z)}{f_4(z)}$ die Transformation

$$w = \frac{J(z)}{f_4(z)(z-a)(z-b)},\quad a \neq b,\ a, b \text{ komplex},$$

so entstehen aus den Geraden und Kreisen durch und um den Anfangspunkt der w-Ebene sofort zwei Büschel

$$B_0^{12},\quad B_0'^{12}$$

zueinander orthogonaler, sechsfach zirkularer Kurven zwölfter Ordnung. Die reellen Knotenpunkte des Büschels B_0^{12} liegen in den Nullstellen von $f_4(z)$ und $J(z)$ sowie in $z=a$ und $z=b$. Die beiden Büschel werden durch die Inversionen und Spiegelungen J_i in drei weitere Paare von Büscheln

$$B_1^{12},\ B_1'^{12};\ B_2^{12},\ B_2'^{12};\ B_3^{12},\ B_3'^{12}$$

je zueinander orthogonaler, sechsfach zirkularer Kurven zwölfter Ordnung verwandelt. Die drei Kurvenbüschel B_i^{12} haben — wie B_0^{12} — die Nullstellen von $f_4(z)$ und $J(z)$ zu einfachen Knotenpunkten, dazu noch jeweils diejenigen beiden Punkte, die aus $z=a$ und $z=b$ vermöge der Inversion und Spiegelung J_i entstehen.

Schließlich werde die biquadratische Funktion wieder (wie in Nr. 5a) in der Form

$$f_4(z) = z^4 + 6(\alpha + i\beta)z^2 + 1$$

angesetzt, so daß $J(z)$ die Form

$$J(z) = z^5 - z \text{ mit einer Nullstelle in } \infty$$

annimmt. Außerdem sollen die beiden Punkte $z=a$, $z=b$ mit ein- und derselben Null-

stelle ($z = \infty$) von $J(z)$ zusammenfallen.

Unter diesen Umständen reduziert sich der Büschel B_0^{10} unter Abspaltung der uneigentlichen Geraden auf einen Büschel von Kurven neunter Ordnung B_0^9, der Büschel $B_0'^{12}$ auf einen solchen von Kurven zehnter Ordnung $B_0'^{10}$. Ihre Gleichungen lauten:

$$(10)\quad B_0^9\begin{cases} r^9(\sin\varphi + \lambda\cos\varphi) + 6\alpha r^7(\lambda\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + 3\sin\varphi\cos^2\varphi - 3\lambda\sin^2\cos\varphi) \\ -6\beta r^7(\cos^3\varphi + \lambda\sin^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi - 3\lambda\sin\varphi\cos^2\varphi) + 2r^5\sin 4\varphi(\cos\varphi + \lambda\sin\varphi) \\ +6r^3[\alpha(\sin\varphi - \lambda\cos\varphi) + \beta(\cos\varphi + \lambda\sin\varphi)] - r(\sin\varphi + \lambda\cos\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$(11)\quad B_0'^{10} \qquad r^2 J(r,\varphi) + \lambda F(r,\varphi) = 0$$

mit

$$J(r,\varphi) = r^8 - r^6(2\cos^4\varphi + 2\sin^4\varphi - 3\sin^2 2\varphi) + 1,\ F(r,\varphi) \text{ siehe Gleichung (9).}$$

Die drei Inversionen und Spiegelungen J_i (Nr. 5a) sind dargestellt durch:

$$J_1\colon z' = \frac{1}{z},\ J_2\colon z' = -\frac{1}{z},\ J_3\colon z' = -z.$$

Die beiden Kurvenbüschel B_0^9, $B_0'^{10}$ gehen durch J_3 in sich über; sowohl J_1 als auch J_2 verwandeln B_0^9 und $B_0'^{10}$ in zwei Büschel zueinander orthogonaler Kurven bzw. zehnter Ordnung B_1^9, $B_1'^{10}$. Ihre Gleichungen sind:

$$(12)\quad B_1^9\begin{cases} r^9(\lambda\cos\varphi - \sin\varphi) - 6r^7[\alpha(\sin\varphi + \lambda\cos\varphi) - \beta(\cos\varphi - \lambda\sin\varphi)] \\ -2r^5\sin 4\varphi(\cos\varphi + \lambda\sin\varphi) - 6\alpha r^3(\lambda\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + 3\sin\varphi\cos^2\varphi - 3\lambda\sin^2\varphi\cos\varphi) \\ -6\beta r^3(\cos^3\varphi - \lambda\sin^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + 3\lambda\sin\varphi\cos^2\varphi) + r(\sin\varphi - \lambda\cos\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$(13)\quad B_1'^{10} \qquad \lambda r^2 F(r,\varphi) + J(r,\varphi) = 0.$$

Die Kurven der Kurvenbüschel B_0^9, B_1^9 haben die Geraden des Geradenbüschels $y = \lambda x$ zu Asymptoten. Die Kurve mit dem Parameterwert λ im Büschel B_0^9 hat die Gerade $y = -\lambda x$ zur Asymptote, die Kurve mit dem gleichen Parameterwert λ im Büschel B_1^9 besitzt die Asymptote $y = +\lambda x$. Mit Hilfe der Nr. 4 ist leicht einzusehen, daß die Verwendung der Transformation $w = \frac{J(z)}{H(z)}$ an der Stelle von $w = \frac{J(z)}{f_4(z)}$ nur dieselben Ergebnisse liefert.

Mit Rücksicht auf die Kovarianz der benutzten Transformationen und geometrischen Konfigurationen bleiben die angegebenen Eigenschaften der im Abschnitt I A erhaltenen zirkularen Kurven und Kurvenbüschel (abgesehen vom asymptotischen Verhalten) invariant gegenüber den linearen Substitutionen der komplexen Ebene.

B. Zirkulare Kurven der pseudoeuklidischen Ebene.

6. Die pseudoeuklidische oder dualkomplexe Ebene trägt ∞^2 Punkte $z = x + \varepsilon y$ mit $\varepsilon^2 = +1$. An die Stelle der euklidischen konjugiert imaginären Kreispunkte treten die pseudoeuklidischen Fundamentalpunkte bzw. Kreispunkte $L_1(1:1:0)$ und $L_2(1:-1:0)$. Die euklidischen Kreise aber sind durch die gleichseitigen Hyperbeln durch L_1, L_2 als pseudoeuklidische Kreise zu ersetzen. Dementsprechend ist eine Kurve der pseudoeuklidischen Ebene n-fach zirkulär, wenn sie n-mal durch jeden der Punkte L_1, L_2 hindurchgeht.

Für ganze rationale Funktionen einer dualkomplexen Veränderlichen $z = x + \varepsilon y$ gilt der Fundamentalsatz der Algebra nicht in der üblichen Form. Die Funktion

$$w = u + \varepsilon v = f(z) = f(x + \varepsilon y)$$

der dualkomplexen Veränderlichen z verschwindet dann und nur dann, wenn $u(x, y)$ und $v(x, y)$ gleichzeitig Null sind. Insbesondere besitzt eine ganze rationale Funktion n-ten Grades n^2 (reelle oder konjugiert komplexe) Nullstellen. Die konjugiert komplexen Nullstellen finden in der pseudoeuklidischen Ebene keine Darstellung.

Die Kovarianten ganzer rationaler dualkomplexer Funktionen unterliegen denselben Bildungsgesetzen wie diejenigen der ganzen rationalen komplexen Funktionen, und sie bleiben gegenüber den linearen Substitutionen einer dualkomplexen Veränderlichen bis auf ganzzahlige Potenzen der Substitutionsdeterminante invariant.

So besitzt die kubische dualkomplexe Funktion

$$f_3(z) = a_0 z^3 + 3a_1 z^2 + 3a_2 z + a_3$$

eine Jacobische Kovariante $J(z)$ vom dritten und eine Hessesche Kovariante $H(z)$ vom zweiten Grade. Erhält $H(z)$ die Form

$$H(z) = z^2 - 1\,,$$

so läßt sich $f_3(z)$ auf die Form

$$f_3(z) = z^3 + 3(p + \varepsilon q)z^2 + 3z + (p + \varepsilon q)$$

bringen. Die Verbindungsstrecke der beiden Nullstellen $+1$, -1 von $H(z)$ bestimmt die gleichseitige Hyperbel h^2 durch L_1, L_2 mit der Gleichung

$$x^2 - y^2 = 1$$

als ihre reelle Hauptachsensehne, und es ergibt sich der Satz:

Durch Inversion an der gleichseitigen Hyperbel h^2 und Spiegelung an ihrer reellen Hauptachse werden die Nullstellen der dualkomplexen kubischen Funktion mit denen ihrer Jacobischen Kovariante vertauscht.

7. Die Funktion $w = \dfrac{f_3(z)}{H(z)}$ verwandelt die ∞^1 Geraden durch den Anfangspunkt der w-Ebene und die ∞^1 (mit L_1, L_2 inzidenten) gleichseitigen Hyperbeln mit diesem Mittelpunkt in zwei pseudoeuklidisch orthogonale Büschel B_1^5, B_2^6 von Kurven fünfter bzw. sechster Ordnung. Die Gleichungen der beiden Büschel lauten in pseudoeuklidischen Polarkoordinaten ϱ, t ($x = \varrho\,\mathfrak{Cof}\,t$, $y = \varrho\,\mathfrak{Sin}\,t$):

$$(14)\quad B_1^5\left\{\begin{array}{c}[\varrho^4 - 2\varrho^2(1 + 2\,\mathfrak{Cof}^2 t) - 8p\varrho\,\mathfrak{Cof}\,t - 3]\varrho\,\mathfrak{Sin}\,t + (q + \lambda p)[3\varrho^4 - 2\varrho^2\mathfrak{Cof}\,2t - 1] \\ + \lambda[\varrho^4 + 2\varrho^2(1 - 2\,\mathfrak{Sin}^2 t) - 8q\varrho\,\mathfrak{Sin}\,t - 3]\varrho\,\mathfrak{Cof}\,t = 0\end{array}\right.$$

$$(15)\quad B_2^6\left\{\begin{array}{c}\varrho^6 + 6\varrho(\varrho^4 + 1)(p\,\mathfrak{Cof}\,t - q\,\mathfrak{Sin}\,t) + 6\varrho^2(\varrho^2 + p^2 - q^2)\,\mathfrak{Cof}\,2t + 9\varrho^4(p^2 - q^2) \\ + 12\varrho^3(p\,\mathfrak{Cof}\,t + q\,\mathfrak{Sin}\,t) + 8\varrho^3(p\,\mathfrak{Cof}^3 t - q\,\mathfrak{Sin}^3 t) + 9\varrho^2 + p^2 - q^2 \\ + \lambda[\varrho^4 - 2\varrho^2\,\mathfrak{Cof}\,2t + 1] = 0\end{array}\right.$$

oder

$$f(\varrho, t) + \lambda\, h(\varrho, t) = 0\,.$$

Die Transformation $w = \dfrac{1}{z}$, d. h. die Inversion an der Hyperbel h^2 und die Spiegelung an ihrer reellen Hauptachse verwandelt nach dem letzten Satz der Nr. 6 die Transformation $w = \dfrac{f_3(z)}{H(z)}$ in $w = \dfrac{J(z)}{z\,H(z)}$. Dabei gehen die beiden Kurvenbüschel B_1^5, B_2^6 in

zwei zueinander pseudoeuklidisch orthogonale Büschel $B_1'^6$, $B_2'^6$ von Kurven sechster Ordnung über mit den Gleichungen:

$$(16)\quad B_1'^6\begin{cases}[3\varrho^4+2\varrho^2(1+2\mathfrak{Cof}^2t)+8p\varrho^3\mathfrak{Cof}t-1]\varrho\,\mathfrak{Sin}t-(q+\lambda p)\varrho^2(\varrho^4+2\varrho^2\mathfrak{Cof}2t-3)\\ -\lambda[3\varrho^4-2\varrho^2(1-2\mathfrak{Sin}^2t)-8q\varrho^3\mathfrak{Sin}t-1]\varrho\,\mathfrak{Cof}t=0\end{cases}$$

$$(17)\quad B_2'^6\begin{cases}(p^2-q^2)\varrho^6+6\varrho(\varrho^4+1)(p\,\mathfrak{Cof}t+q\,\mathfrak{Sin}t)+6\varrho^2(p^2\varrho^2-q^2\varrho^2+1)\,\mathfrak{Cof}2t+9\varrho^4\\ +12\varrho^3(p\,\mathfrak{Cof}t-q\,\mathfrak{Sin}t)+8\varrho^3(p\,\mathfrak{Cof}^3t+q\,\mathfrak{Sin}^3t)+9(p^2-q^2)\varrho^2+1\\ +\lambda\varrho^2[\varrho^4-2\varrho^2\,\mathfrak{Cof}2t+1]=0\end{cases}$$

oder

$$j(\varrho,t)+\lambda\varrho^2h(\varrho,t)=0\,.$$

Die ∞^1 Kurven fünfter Ordnung des Büschels B_1^5 haben Spitzen in beiden Fundamentalpunkten L_1, L_2 und sie berühren alle einander in diesen Spitzen; sie haben vier gemeinsame Asymptoten mit den Gleichungen

$$y=x+1,\ y=-x+1,\ y=x-1,\ y=-x-1\,.$$

Außerdem besitzt jede Kurve des Büschels B_1^5 eine eigene Asymptote mit der Gleichung $y=-\lambda x-3p\lambda-3q$; diese ∞^1 fünften Asymptoten bilden also einen Strahlenbüschel erster Ordnung. Die beiden Fundamentalpunkte zählen als Knotenpunkte des Büschels B_1^5 je sechsfach. Zu ihnen treten als weitere Knotenpunkte die neun Nullstellen von $f_3(z)$ — ihre Realitätsverhältnisse hängen von den Koeffizienten p und q ab — und die vier Nullstellen von $H(z)$.

Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des orthogonalen Büschels B_2^6 sind dreifach zirkular, sie haben zwei Tripel gemeinsamer (reeller oder konjugiert imaginärer) je paralleler Asymptoten mit den Gleichungen $y=\pm x+\mu_i$, $(i=1,2,3)$. Außer den beiden Fundamentalpunkten, deren jeder neunfacher Knotenpunkt ist, hat der Büschel achtzehn weitere Knotenpunkte, deren Realitätsverhältnisse von den Koeffizienten p, q abhängen.

Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des Büschels $B_1'^6$ besitzen zwei Tripel gemeinsamer, je paralleler Asymptoten mit den Gleichungen $y=\pm x+\mu_i$ $(i=1,2,3)$. Die Knotenpunkte des Büschels $B_1'^6$ sind die beiden je neunfach zählenden Fundamentalpunkte, die neun Nullstellen von $J(z)$, deren Realitätsverhältnisse von p und q abhängen und die neun Nullstellen von $zH(z)$, nämlich fünf reelle und zwei Paare konjugiert imaginäre.

Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des orthogonalen Büschels B'^6_2 sind dreifach zirkular. Ihre gemeinsamen Asymptoten und Knotenpunkte bilden gleiche Konfigurationen wie beim Büschel B_2^6.

8. Die n Größen

$$z_\nu=x_\nu+\varepsilon y_\nu,\quad \nu=1,2,3,\ldots,n,$$

sollen n reelle oder paarweise konjugiert imaginäre Punkte der dualkomplexen (pseudoeuklidischen) Ebene bezeichnen; für die x_ν und die y_ν sind also gewöhnliche komplexe Zahlen zugelassen. Eine ganze rationale Funktion n-ten Grades kann dann in der dualkomplexen Ebene als Produkt von n Linearfaktoren dargestellt werden:

$$f_n(z)=\prod_{\nu=1}^{n}(z-z_\nu)=u(x,y)+\varepsilon\,v(x,y)\,.$$

Durch n Nullstellen einer Funktion n-ten Grades sind ihre $n(n-1)$ übrigen Nullstellen bestimmt als die restlichen Schnittpunkte der beiden Kurven $u(x,y)=0$ und $v(x,y)=0$. Der Kurvenbüschel B_1^5 (Nr. 7) und sein pseudoeuklidischer Orthogonalbüschel B_2^6 sind

somit durch drei Punkte als Nullstellen von $f_3(z)$ bestimmt; mindestens einer der drei Punkte muß reell sein. Sie bedingen die übrigen sechs Nullstellen von $f_3(z)$ und damit auch diejenigen von $H(z)$. Die involutorische Transformation J, bestehend aus der Inversion an der Hyperbel h^2 und der Spiegelung an ihrer Hauptachse, hat die Nullstellen von $H(z)$ zu Fixpunkten.

Die Transformation

$$w = \frac{f_3(z)}{J(z)}$$

verwandelt die ∞^1 Geraden durch den Anfangspunkt der w-Ebene und die ∞^1 (mit L_1, L_2 inzidenten) gleichseitigen Hyperbeln mit diesem Mittelpunkte in zwei zueinander pseudoeuklidisch orthogonale Büschel B_3^6 und B_4^6 von Kurven sechster Ordnung. Die Gleichungen dieser Kurvenbüschel lauten:

$$(18)\quad B_3^6 \left\{ \begin{array}{c} q\varrho^6 + 3(p^2 - q^2 - 1)(\varrho^4 + 1)\varrho\,\mathfrak{Sin}\,t - (9q\varrho^2 - 6q\varrho^2\,\mathfrak{Cof}2t)(\varrho^2 - 1) \\ + (p^2 - q^2 - 1)\varrho^3\,\mathfrak{Sin}\,t(6 - 4\,\mathfrak{Sin}^2 t) - q \\ + \lambda[p\varrho^6 + 3(p^2 - q^2 + 1)(\varrho^4 + 1)\varrho\,\mathfrak{Cof}\,t + (9p\varrho^2 + 6p\varrho^2\,\mathfrak{Cof}2t)(\varrho^2 + 1) \\ + (p^2 - q^2 + 1)\varrho^3\,\mathfrak{Cof}\,t(6 + 4\,\mathfrak{Cof}^2 t) + p] = 0 \end{array} \right.$$

$$(19)\quad B_4^6 \qquad f(\varrho, t) + \lambda j(\varrho, t) = 0\,,$$

$f(\varrho,t)$ siehe Gleichung (15), $j(\varrho,t)$ siehe Gleichung (17).

Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des Büschels B_3^6 und des Büschels B_4^6 sind dreifach zirkular. Jede Kurve besitzt zwei Tripel von je drei einander parallelen Asymptoten mit den Gleichungen $y = \pm x + \mu_i$ $(i = 1, 2, 3)$. In jedem Tripel ist mindestens eine Asymptote reell.

Jeder der beiden Fundamentalpunkte L_1, L_2 ist neunfacher Knotenpunkt des Büschels B_3^6. Die übrigen Knotenpunkte dieses Büschels sind die neun Nullstellen von $f_3(z)$ und die neun Nullstellen von $J(z)$; ihre Realitätsverhältnisse hängen von den Koeffizienten p, q ab. Der Büschel B_4^6 hat außer den beiden je neunfach zählenden Fundamentalpunkten keine reellen Knotenpunkte.

Die Inversion an der gleichseitigen Hyperbel h^2 nebst der Spiegelung an ihrer Hauptachse führt jeden der beiden Büschel B_3^6, B_4^6 in sich über, wobei die Kurven jedes Büschels untereinander vertauscht werden. Dagegen werden die beiden Kurven B_1^5, B_2^6 bzw. mit den beiden Kurvenbüscheln $B_1'^6$, $B_2'^6$ vertauscht.

9. Die biquadratische Funktion $w = f_4(z)$ der dualkomplexen Ebene hat die Hessesche Kovariante $H(z)$ vom vierten und die Jacobische Kovariante $J(z)$ vom sechsten Grade. Es ergeben sich drei Nullstellenpaare $\partial_1\partial_2$, $\partial_3\partial_4$, $\partial_5\partial_6$ von $J(z)$, die zu drei verschiedenen quadratischen Faktoren von $J(z)$ gehören. Stets ist eines von diesen Punktepaaren imaginär, die beiden anderen reell. Die drei Verbindungsstrecken der drei Punktepaare bestimmen drei mit L_1, L_2 inzidente gleichseitige Hyperbeln als deren Achsensehnen. Die drei Inversionen an den drei Hyperbeln nebst den Spiegelungen an den zugehörigen Hyperbelachsen stellen drei involutorische Transformationen J_1, J_2, J_3 der dualkomplexen Ebene dar. Sie bilden mit der Identität eine Vierergruppe. Jede der drei Transformationen J_1, J_2, J_3 führt $f_4(z)$ und $H(z)$ je durch Vertauschung ihrer Nullstellen in sich über und sie verwandelt $J(z)$ in sich, indem sie zwei seiner Nullstellen fest läßt und die anderen vertauscht. Wegen $f_4(z) = \prod_{\nu=1}^{4} (z - z_\nu)$ ist die Gesamtkonfiguration durch vier Punkte der dualkomplexen Ebene bestimmt. Als biquadratische dualkomplexe Normalform bezeichnen

wir

$$f_4(z) = z^4 + 6(\alpha + \varepsilon\beta)z^2 + 1$$

und erhalten

$$H(z) = z^4 + \frac{1 - (\alpha + \varepsilon\beta)^2}{\alpha + \varepsilon\beta} z^2 + 1, \; J(z) = z^5 - z,$$

$$J_1\colon\ z' = \frac{1}{z},\ \text{Fixpunkte in } +1,\ -1;$$

$$J_2\colon\ z' = -\frac{1}{z},\ \text{Fixpunkte in } +i\varepsilon,\ -i\varepsilon;$$

$$J_3\colon\ z' = -z,\ \text{Fixpunkte in } 0,\ \infty\,.$$

Die vier gegebenen Nullstellen z_ν von $f_4(z)$ bedingen aber nicht nur die beschriebene Konfiguration, sondern auch die drei gebrochenen rationalen Transformationen der dualkomplexen Ebene, die sich durch Kombination von je zweien der drei Formen $f_4(z)$, $H(z)$, $J(z)$ bilden lassen:

$$w = \frac{f_4(z)}{H(z)},\quad w = \frac{J(z)}{f_4(z)},\quad w = \frac{J(z)}{H(z)}.$$

a) Die Transformation $w = \dfrac{f_4(z)}{H(z)}$ verwandelt den Geradenbüschel durch den Anfangspunkt $w = 0$ und den Büschel der (mit L_1, L_2 inzidenten) gleichseitigen Hyperbeln mit diesem Mittelpunkte in zwei zueinander (pseudoeuklidisch) orthogonale Büschel B_1^8, B_2^8 von Kurven achter Ordnung mit den Gleichungen:

$$(20)\ B_1^8\begin{cases}\beta(9\alpha^2 - 9\beta^2 + 1)(\varrho^4 + 1)\varrho^2 \mathfrak{Cof}\,2t - \alpha(9\alpha^2 - 9\beta^2 - 1)(\varrho^4 - 1)\varrho^2 \mathfrak{Sin}\,2t + 12\alpha\beta\varrho^4 \\ \quad + \lambda[\alpha(1 + 3\alpha^2 - 3\beta^2)(\varrho^4 + 1)\varrho^2 \mathfrak{Cof}\,2t - \beta(3\alpha^2 - 3\beta^2 - 1)(\varrho^4 - 1)\varrho^2 \mathfrak{Sin}\,2t \\ \quad + 6(\alpha^2 + \beta^2 - 3(\alpha^2 - \beta^2)^2)\varrho^4 + (\alpha^2 - \beta^2)(\{\varrho^4 + 1\}^2 + 4\varrho^4 \mathfrak{Sin}^2 2t)] = 0\end{cases}$$

$$(21)\ B_2^8\begin{cases}\varrho^8 + 12\alpha(\varrho^4 + 1)\varrho^2 \mathfrak{Cof}\,2t - 12\beta(\varrho^4 - 1)\varrho^2 \mathfrak{Sin}\,2t \\ \quad + 2(1 + 18\alpha^2 - 18\beta^2)\varrho^4 + 4\varrho^4 \mathfrak{Sin}^2 2t + 1 \\ + \lambda\Big[\varrho^8 + \dfrac{2}{(\alpha^2 - \beta^2)^2}(18 - 107\alpha^2 - 109\beta^2 + 162(\alpha^2 - \beta^2)^2)\varrho^4 \\ + \dfrac{12\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}(1 - 3\alpha^2 + 3\beta^2)(\varrho^4 + 1)\,\varrho^2 \mathfrak{Cof}\,2t \\ + \dfrac{12\beta}{\alpha^2 - \beta^2}(1 + 3\alpha^2 - 3\beta^2)\ (\varrho^4 - 1)\varrho^2 \mathfrak{Sin}\,2t + 4\varrho^4 \mathfrak{Sin}^2 2t + 1\Big] = 0\end{cases}$$

oder

$$F(\varrho, t) + \lambda H(\varrho, t) = 0\,.$$

Die ∞^1 Kurven achter Ordnung des Büschels B_1^8 und ebenso die ∞^1 Kurven achter Ordnung des pseudoeuklidischen Orthogonalbüschels B_2^8 sind vierfach zirkular. Jede Kurve beider Büschel besitzt zwei Quadrupel untereinander je paralleler Asymptoten mit den Gleichungen $y = \pm x + \mu_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, deren Realität von den Koeffizienten von $f_4(z)$ und vom Büschelparameter λ abhängt. Durch jede der drei Inversionen und Spiegelungen J_1, J_2, J_3 geht jede Kurve achter Ordnung beider Büschel in sich über.

b) Die Transformation $w = \dfrac{J(z)}{f_4(z)}$ bildet den Geradenbüschel $w = 0$ und den Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch L_1, L_2 mit diesem Mittelpunkte auf einen Büschel von

fünffach zirkularen Kurven zehnter Ordnung B_0^{10} und auf einen Büschel von sechsfach zirkularen Kurven zwölfter Ordnung $B_0'^{12}$ ab. Durch die drei Inversionen nebst Spiegelungen J_i gehen die beiden zueinander pseudoeuklidisch orthogonalen Kurvenbüschel B_0^{10}, $B_0'^{12}$ in die drei Paare von Büscheln pseudoeuklidisch orthogonaler, sechsfach zirkularer Kurven zwölfter Ordnung über:

$$B_1^{12},\ B_1'^{12};\ B_2^{12},\ B_2'^{12};\ B_3^{12},\ B_3'^{12}.$$

Die Substitution J_i führe den Punkt ∞ in z_i über und es bezeichne Δ_i die zugehörige Substitutionsdeterminante. Dann werden durch die drei Transformationen

$$w = \frac{\Delta_i\, J(z)}{z_i^2\, f_4(z)},\quad i = 1, 2, 3,$$

die drei Büschelpaare B_i^{12}, $B_i'^{12}$ von Kurven zwölfter Ordnung unmittelbar als die Bilder des Geradenbüschels $w = 0$ und des Büschels gleichseitiger Hyperbeln durch L_1, L_2 mit diesem Mittelpunkte erhalten.

c) Tritt an die Stelle von $w = \dfrac{J(z)}{f_4(z)}$ die Transformation

$$w = \frac{J(z)}{f_4(z)(z-a)(z-b)},$$

so entstehen aus den Geraden und gleichseitigen Hyperbeln durch und um den Anfangspunkt unmittelbar zwei Büschel

$$B_0^{12},\ B_0'^{12}$$

zueinander pseudoeuklidisch orthogonaler sechsfach zirkularer Kurven zwölfter Ordnung. Sie besitzen 36-fache Knotenpunkte in den Fundamentalpunkten L_1, L_2 und einfache Knotenpunkte in den 36 Nullstellen von $J(z)$ und den 36 Nullstellen von $f_4(z)(z-a)(z-b)$. Sie werden durch die drei Inversionen und Spiegelungen J_i wie oben unter b) in die drei weiteren Paare von Büscheln

$$B_1^{12},\ B_1'^{12};\ B_2^{12},\ B_2'^{12};\ B_3^{12},\ B_3'^{12}$$

zueinander pseudoeuklidisch orthogonaler sechsfach zirkularer Kurven zwölfter Ordnung verwandelt. Während die Nullstellen von $f_4(z)$ und $J(z)$ ihre Rolle als Knotenpunkte auch für diese Kurvenbüschel beibehalten, gehen die Punkte a und b durch J_i in die neuen Knotenpunkte a_i, b_i dieser Büschel über.

Die biquadratische Funktion habe — wie vorhin — die Form

$$f_4(z) = z^4 + 6(\alpha + \varepsilon\beta)z^2 + 1 \quad \text{mit} \quad J(z) = z^5 - z.$$

Dabei sei jetzt $a = b$ und falle mit einer Nullstelle ($z = \infty$) von $J(z)$ zusammen. Unter diesen Umständen reduziert sich der Büschel B_0^{12} auf einen Büschel von Kurven neunter Ordnung B_0^9 und $B_0'^{12}$ auf einen Büschel von Kurven zehnter Ordnung $B_0'^{10}$. Ihre Gleichungen lauten:

$$(22)\ B_0^9\left\{\begin{array}{c}\varrho^9(\mathfrak{Sin}t + \lambda\mathfrak{Cof}t) + 6\alpha\varrho^7(\mathfrak{Sin}^3t + \lambda\mathfrak{Cof}^3t + 3\mathfrak{Sin}t\,\mathfrak{Cof}^2t + 3\lambda\mathfrak{Sin}^2t\,\mathfrak{Cof}t)\\ -6\beta\varrho^7(\mathfrak{Cof}^3t + \lambda\mathfrak{Sin}^3t + 3\mathfrak{Sin}^2t\,\mathfrak{Cof}t + 3\lambda\mathfrak{Sin}t\,\mathfrak{Cof}^2t) + 2\varrho^5\mathfrak{Sin}4t(\mathfrak{Cof}t + \lambda\mathfrak{Sin}t)\\ + 6\varrho^3[\alpha(\mathfrak{Sin}t - \lambda\mathfrak{Cof}t) + \beta(\mathfrak{Cof}t - \lambda\mathfrak{Sin}t)] - \varrho(\mathfrak{Sin}t + \lambda\mathfrak{Cof}t) = 0\end{array}\right.$$

$$(23)\ B_0'^{10} \qquad \varrho^2 J(\varrho, t) + \lambda F(\varrho, t) = 0$$

mit

$J(\varrho, t) = \varrho^8 - \varrho^4(2\,\mathfrak{Cof}^4 t + 2\,\mathfrak{Sin}^4 t + 3\,\mathfrak{Sin}^2 2t) + 1$, $F(\varrho, t)$ siehe Gleichung (21).

Jeder dieser beiden Kurvenbüschel geht durch J_3 in sich über. Sowohl J_1 als J_2 verwandeln B_0^9 und $B_0'^{10}$ in zwei Büschel zueinander pseudoeuklidisch orthogonaler Kurven neunter bzw. zehnter Ordnung B_1^9 bzw. $B_1'^{10}$. Ihre Gleichungen sind:

$$(24)\ B_1^9\begin{cases} \varrho^9(\lambda\,\mathfrak{Cof}\,t - \mathfrak{Sin}\,t) - 6\varrho^7[\alpha(\mathfrak{Sin}\,t + \lambda\,\mathfrak{Cof}\,t) - \beta(\mathfrak{Cof}\,t + \lambda\,\mathfrak{Sin}\,t)] \\ -2\varrho^5\,\mathfrak{Sin}4t(\mathfrak{Cof}\,t - \lambda\,\mathfrak{Sin}\,t) - 6\varkappa\varrho^3(\mathfrak{Sin}^3 t + \lambda\,\mathfrak{Cof}^3 t + 3\,\mathfrak{Sin}\,t\,\mathfrak{Cof}^2 t + 3\lambda\,\mathfrak{Sin}^2 t\,\mathfrak{Cof}\,t) \\ -6\beta\varrho^3(\mathfrak{Cof}^3 t - \lambda\,\mathfrak{Sin}^3 t + 3\,\mathfrak{Cof}\,t\,\mathfrak{Sin}^2 t - 3\lambda\,\mathfrak{Sin}\,t\,\mathfrak{Cof}^2 t) + \varrho\,(\mathfrak{Sin}\,t - \lambda\,\mathfrak{Cof}\,t) = 0 \end{cases}$$

$$(25)\ B_1'^{10} \qquad \varrho^2 F(\varrho, t) + \lambda J(\varrho, t) = 0\,.$$

Die ∞^1 Kurven neunter Ordnung des Kurvenbüschels B_0^9 haben zwei Quadrupel je untereinander paralleler gemeinsamer Asymptoten mit den Gleichungen $y = \pm x + \mu_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Die Realitätsverhältnisse der Asymptoten hängen von den Koeffizienten von $f_4(z)$ ab. Daneben besitzt jede Kurve des Büschels eine weitere eigene Asymptote mit der Gleichung $y = -\lambda x$, wo λ der Parameterwert der Kurve ist.

Die ∞^1 Kurven zehnter Ordnung des Kurvenbüschels $B_0'^{10}$ haben sechs gemeinsame reelle Asymptoten, die sich auf zwei Tripel je paralleler Geraden mit den Gleichungen $y = \pm x + \mu_i$ verteilen, und vier paarweise parallele konjugiert imaginäre Asymptoten.

Die ∞^1 Kurven neunter Ordnung des Büschels B_1^9 haben zwei Quadrupel je untereinander paralleler paarweise konjugiert imaginärer Asymptoten gemein. Daneben besitzt jede Kurve des Büschels B_1^9 eine eigene Asymptote $y = \lambda x$.

Die ∞^1 Kurven des Büschels $B_1'^{10}$ besitzen zwei Quintupel je untereinander paralleler gemeinsamer Asymptoten, deren Realitätsverhältnisse von den Koeffizienten von $f_4(z)$ abhängen.

Aus Nr. 9 ist leicht zu folgern, daß die Verwendung der Transformation $w = \dfrac{J(z)}{H(z)}$ an der Stelle von $w = \dfrac{J(z)}{f_4(z)}$ nur die gleichen Ergebnisse liefert.

10. Die im Abschnitt I behandelten dreifach zirkularen Kurven sechster Ordnung (Nr. 2, 3, 7, 8) der komplexen wie der dualkomplexen Ebene sind vom Geschlechte vier; außer den Fundamentalpunkten haben sie i. a. keine Doppelpunkte oder mehrfachen Punkte. Nun enthält ein Büschel von Kurven n-ter Ordnung $3(n-1)^2$ Kurven mit Doppelpunkten[6]). Durch jeden s-fachen Basispunkt, in dem die Kurven einander nicht berühren, wird diese Zahl um $(s-1)(3s+1)$ verringert[7]). Hieraus folgt:

Die behandelten dreifach zirkularen Kurven sechster Ordnung sind i. a. vom Geschlecht vier. In jedem Büschel B^6 solcher Kurven liegen jedoch eine Anzahl Kurven C_{λ_i} niederen Geschlechts. Die sie kennzeichnenden Werte λ_i des Büschelparameters λ genügen einer algebraischen Gleichung vom 35. Grade $R(\lambda) = 0$. Die Kurven mit diesen Parameterwerten λ_i sind i. a. vom Geschlecht drei mit je einem Doppelpunkt außerhalb der Fundamentalpunkte; jedoch können auch Kurven mit 2, 3 oder 4 solchen Doppelpunkten auftreten[8]) bis herunter zum Geschlecht Null.

---

[6]) Steiner, Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Kurven, Journal f. d. reine u. angew. Math. 47 (1848), S. 1—6, Ges. Werke Bd. II, S. 495.

[7]) Cremona, Annal. di mat. (1) 6, (1864), S. 153.

[8]) Die Bedingungen für das Auftreten von Kurven mit mehreren Doppelpunkten in einem Büschel von Kurven n-ter Ordnung wurden von Cayley aufgestellt, Cambr. Transactions 11 (1863), S. 21.

Enthält die Büschelgleichung nur gerade Potenzen von x und y, so haben die Kurven mit den ausgezeichneten Parameterwerten λ_i je vier Doppelpunkte außerhalb der Knotenpunkte des Büschels, sind also rational. Die Wurzeln der Gleichung $R(\lambda) = 0$ können teilweise zusammenfallen oder der Grad kann infolge Ausfalls einzelner Koeffizienten sinken.

II. Konjugierte Büschel von Regelflächen sechsten, achten, zehnten und zwölften Grades in der linearen Kongruenz.

11. Die *elliptische* lineare Kongruenz sei durch die Gleichungen dargestellt:

$$p_2 - p_5 = 0, \; p_3 - p_6 = 0 .$$

Die Plückersche Fundamentalbeziehung der Plückerschen Linienkoordinaten

$$p_i (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

nimmt dann die Form

$$p_5^2 + p_6^2 + p_1 p_4 = 0$$

an und verwandelt sich durch $p_1 = x_3 + x_4$, $p_4 = x_3 - x_4$, $p_5 = x_2$, $p_6 = x_1$ und $\frac{x_1}{x_4} = \xi$, $\frac{x_2}{x_4} = \eta$, $\frac{x_3}{x_4} = \zeta$ in die Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 .$$

Bei nachfolgender stereographischer Projektion der letzteren aus dem Projektionszentrum $\xi = \eta = 0$, $\zeta = 1$ werden insgesamt die ∞^2 Strahlen der elliptischen linearen Kongruenz auf die ∞^2 Punkte der euklidischen (komplexen) Ebene umkehrbar eindeutig abgebildet, nämlich

$$-\frac{p_6}{p_4} = \frac{x_1}{x_3} = x, \quad -\frac{p_5}{p_4} = \frac{x_2}{x_3} = y .$$

Soll umgekehrt der einem Punkte $P(x, y)$ zugeordnete Kongruenzstrahl bestimmt werden, so sind die beiden Kongruenzgleichungen und die Plückerschen Fundamentalbeziehungen heranzuziehen. Dem unendlichfernen Kongruenzstrahle $p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6 = 1:0:0:0:0:0$ entspricht die uneigentliche Gerade $x_3 = 0$ der Bildebene. Ihre imaginären Kreispunkte $J_1(1:i:0)$, $J_2(1:-i:0)$ sind die singulären Punkte der Abbildung; ihnen entsprechen je die ∞^1 Strahlen zweier konjugiert imaginärer Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung. Im übrigen werden die einscharig in der Kongruenz enthaltenen Regelflächen zweiten Grades auf die Kreise der Ebene abgebildet, die Strahlenparaboloide auf die Geraden.

Die hyperbolische lineare Kongruenz sei durch die Gleichungen gegeben:

$$p_2 - p_5 = 0, \; p_3 + p_6 = 0 .$$

Die Plückersche Fundamentalbeziehung ergibt hier:

$$p_5^2 - p_6^2 - p_1 p_4 = 0 .$$

Die hyperbolische Kongruenz verwandelt sich daher in das Strahlenhyperboloid

$$\xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 = 1 .$$

Bei anschließender stereographischer Projektion wird die hyperbolische Kongruenz auf die pseudoeuklidische (dualkomplexe) Ebene mit den Fundamentalpunkten $L_1(1:1:0)$, $L_2(1:-1:0)$ abgebildet, so daß — wie bekannt — die gleichseitigen Hyperbeln durch L_1, L_2 an die Stelle der Kreise treten.

12. Eine nicht durch den unendlichfernen Kongruenzstrahl gehende Regelschar n-ter Ordnung der Kongruenz entspricht umkehrbar eindeutig einer ebenen Kurve n-ter Ordnung. Sie geht α-mal durch den Fundamentalpunkt J_1, β-mal durch den Fundamentalpunkt J_2, wobei $\alpha + \beta = n$ ist, und enthält keine weiteren Punkte der uneigentlichen Geraden. Geht eine Regelschar der Kongruenz k-mal durch den unendlichfernen Kongruenzstrahl, so zerfällt ihr Bild in eine Kurve $(n-k)$-ter Ordnung und die k-fache uneigentliche Gerade. Die Kurve geht α-mal durch J_1, β-mal durch J_2 mit $\alpha + \beta = n - k$ und schneidet die uneigentliche Gerade in k weiteren (reellen oder konjugiert imaginären) Punkten. Mittels einer automorphen Kollineation der Kongruenz läßt sich der unendlichferne Kongruenzstrahl durch jeden anderen Strahl a ersetzen. Jede Regelschar n-ter Ordnung, für die $\alpha = \beta = \frac{n}{2}$ ist, läßt sich als vollständiger Schnitt der linearen Kongruenz mit einem Strahlenkomplex vom Grade $\frac{n}{2}$ darstellen.

Es gibt zwei verschiedene Arten von Involutionen auf der linearen Kongruenz; konjugierte Strahlen solcher Involutionen sind reziproke Polaren im polaren Raume einer Fläche zweiten Grades. Ist die Fläche zweiten Grades einscharig in der linearen Kongruenz enthalten, so heißt die Involution eine *primäre*. Liegt die Fläche zweiten Grades dagegen beidscharig involutorisch im geschart involutorischen Raume der Kongruenz, so ist die Involution eine sekundäre[9]). In der (euklidischen oder pseudoeuklidischen) Bildebene der (elliptischen oder hyperbolischen) Kongruenz entsprechen den primären und sekundären Involutionen der Kongruenz die beiden Arten involutorischer Cremonatransformationen[10]). Konjugierte Strahlen einer primären Involution sind abgebildet auf inverse Punkte bzgl. eines (euklidischen oder pseudoeuklidischen) Kreises. Füreinander polarinvariante Regelflächen zweiten Grades der Kongruenz entsprechen zueinander orthogonalen Kreisen der Bildebene. Die ∞^1 Kongruenzrichtungen durch einen gegebenen Kongruenzstrahl s sind paarweise konjugiert und bilden in dieser Anordnung eine Involution konjugierter Richtungen. Zwei konjugierte Kongruenzrichtungen entsprechen zwei zueinander senkrechten Richtungen in der Bildebene. Führen zwei Regelscharen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ der linearen Kongruenz in zwei konjugierten Richtungen durch s, so ist jede die Regelschar $\mathfrak{R}_1$ längs s berührende Regelschar zweiter Ordnung für jede die Regelschar $\mathfrak{R}_2$ längs s berührende Regelschar zweiter Ordnung polarinvariant[11]).

Zwei primäre Involutionen, bedingt durch zwei für einander polarinvariante Regelscharen zweiter Ordnung, haben eine sekundäre Involution zur Resultierenden[10]). In der Bildebene resultiert aus den beiden entsprechenden Inversionen an zwei zueinander orthogonalen Kreisen eine involutorische Cremonatransformation zweiter Art. Die Inversion an einem Kreise h^2 und die Spiegelung an einem Durchmesser stellen also eine solche sekundäre Involution dar, als die Resultierende aus einer primären Involution bedingt durch ein Strahlenhyperboloid H^2 und einer zweiten primären Involution bedingt durch ein für H^2 polarinvariantes Strahlenparaboloid.

A. Die elliptische lineare Kongruenz.

13. Die Fig. 1 gibt unter dem Gesichtspunkt der Abbildung der Kongruenz zu folgenden Überlegungen Anlaß:

---

[9]) S. Jolles, Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz, Math. Ztschr. 27 (1928), S. 427.

[10]) G. Haenzel, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. I., Abschn. I, insbes. A u. B, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 178 (1935), S. 91.

[11]) G. Haenzel, Die Geometrie der lin. Strahlenkongruenz. II., Abschn. IV, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 175 (1936), S. 169.

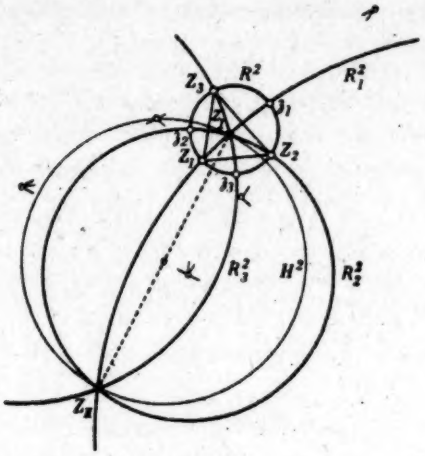


Fig. 1.

Zwei windschiefe Kongruenzstrahlen z_I, z_{II} bestimmen einen Büschel R' von Regelscharen zweiter Ordnung der Kongruenz. (Bild: Der Kreisbüschel durch z_I, z_{II}.) Die Basiskurve des Büschels besteht aus z_I, z_{II} und den Leitgeraden der Kongruenz. Für die ∞^1 Flächen des Büschels R' sind die ∞^1 Regelscharen zweiter Ordnung des konjugierten Büschels R'' der Kongruenz polarinvariant. (Bild: Der orthogonale Kreisbüschel.) Eine herausgegriffene Regelschar $\mathfrak{R}^2$ (Bild: Der Kreis R^2) des Büschels R'' wird von irgend drei Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2$, $\mathfrak{R}_2^2$, $\mathfrak{R}_3^2$ des konjugierten Büschels R' in den Strahlenpaaren z_1, δ_1; z_2, δ_2; z_3, δ_3 geschnitten. Offensichtlich entsprechen die Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3 den Nullstellen einer kubischen Funktion $f_3(z)$, die Kongruenzstrahlen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ den Nullstellen ihrer Jacobischen Kovariante $H(z)$ (Nr. 1). Die Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2$, $\mathfrak{R}_2^2$, $\mathfrak{R}_3^2$ haben die drei apollonischen Kreise des Dreiecks $z_1z_2z_3$ zu Bildern, die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ den Umkreis dieses Dreiecks. Die Inversion am Kreise R^2 und die Spiegelung an seinem Durchmesser $P = z_Iz_{II}$ stellen eine sekundäre Involution J dar als Resultierende einer primären Involution bedingt durch ein Strahlenhyperboloid H^2 und einer zweiten primären Involution bedingt durch das für H^2 polarinvariante Strahlenparaboloid P^2 durch z_Iz_{II}. Die analytische Darstellung der sekundären Involution J lautet in Linienkoordinaten[12]):

$$\varrho p_1' = -p_4,\ \varrho p_4' = -p_1,\ \varrho p_5' = -p_5,\ \varrho p_6' = p_6.$$

Die sekundäre Involution J hat die beiden reellen Geraden

$$z_I\,(1:0:1:-1:0:1),\ z_{II}\,(1:0:-1:-1:0:-1)$$

mit den Bildpunkten z_I, z_{II} und die beiden konjugiert imaginären

$$j_1\,(1:i:0:1:i:0),\ j_2\,(1:-i:0:1:-i:0)$$

zu Doppelstrahlen.

Nach Nr. 12 sind die beiden Paare zueinander orthogonaler Kurvenbüschel (Nr. 2 a, b) B_1^5, B_2^5 und $B_1'^5$, $B_2'^5$ (Gleichungen (1)—(4)) die Bilder zweier Paare von Büscheln konjugierter Regelscharen sechster Ordnung. Die z-Achse des kartesischen Koordinaten-

---

[12]) G. Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der lin. Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 166 (1932), S. 161. Die Abhandlung enthält die analytische Klassifikation aller Involutionen auf der linearen Kongruenz sowie ihre Normaldarstellungen.

systems falle mit dem Hauptstrahl, die xy-Ebene mit der Fluchtebene der Kongruenz zusammen. Die vier Büschel von Flächen sechsten Grades haben dann die Gleichungen:

$$(26)\ B_1^6\begin{cases}[xz-y][3(1+z^2)^2+2(xz-y)^2+6(x+yz)^2-(x^2+y^2)^2-8p(x+yz)(1+z^2)]\\ +\lambda(x+yz)[3(1+z^2)^2-6(xz-y)^2-2(x+yz)^2-(x^2+y^2)^2+8q(xz-y)(1+z^2)]\\ +(\lambda p+q)(1+z^2)[3(x^2+y^2)^2-(1+z^2)^2+2(xz-y)^2-2(x-yz)^2]=0\end{cases}$$

$$(27)\ B_2^6\begin{cases}(x^2+y^2)^3+(p^2+q^2)(1+z^2)^3-8p(x+yz)^3+8q(xz-y)^3\\ +9(x^2+y^2)(1+z^2)[(p^2+q^2)(x^2+y^2)+(1+z^2)]\\ -6[p(x+yz)+q(xz-y)][(x^2+y^2)^2+(1+z^2)^2]\\ +6[(x^2-y^2)(1-z^2)+4xyz][(p^2+q^2)(1+z^2)+(x^2+y^2)]\\ -12(x^2+y^2)(1+z^2)[p(x+yz)-q(xz-y)]\\ +\lambda\{(x^2+y^2)^2+2(xz-y)^2-2(x+yz)^2+(1+z^2)^2\}(1+z^2)=0\end{cases}$$

oder

$$f(x,y,z)+\lambda(1+z)^2h(x,y,z)=0\,,$$

$$(28)\ B_1'^6\begin{cases}(xz-y)[3(x^2+y^2)^2-(1+z^2)^2+2(xz-y)^2+6(x+yz)^2-8p(x^2+y^2)(x+yz)]\\ -\lambda(x+yz)[3(x^2+y^2)^2-(1+z^2)^2-6(xz-y)^2-2(x+yz)^2-8q(x^2+y^2)(xz-y)]\\ +(q-\lambda p)(x^2+y^2)[(x^2+y^2)^2-3(1+z^2)^2-2(xz-y)^2+2(x+yz)^2]=0\end{cases}$$

$$(29)\ B_2'^6\begin{cases}(p^2+q^2)(x^2+y^2)^3-8p(x+yz)^3-8q(xz-y)^3+(1+z^2)^3\\ +9(x^2+y^2)(1+z^2)[(p^2+q^2)(1+z^2)+(x^2+y^2)]\\ -6[p(x+yz)-q(xz-y)][(x^2+y^2)^2+(1+z^2)^2]\\ +6[(x^2-y^2)(1-z^2)+4xyz][(1+z^2)+(p^2+q^2)(x^2+y^2)]\\ -12(x^2+y^2)(1+z^2)[p(x+yz)+q(xz-y)]\\ +\lambda\{(x^2+y^2)^2+2(xz-y)^2+(1+z^2)^2\}(x^2+y^2)=0\end{cases}$$

oder

$$j(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2)\,h(x,y,z)=0\,.$$

Die Koeffizienten p und q hängen rational von den Koordinaten der Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3 ab.

14. Die Ausführungen der Nr. 1—3, 11—13 führen jetzt ohne Schwierigkeit auf folgende Theoreme der elliptischen linearen Kongruenz:

Drei windschiefe Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3 bestimmen — zusammen mit dem unendlichfernen Strahl der Kongruenz — einen Büschel B_1^6 von ∞^1 Regelflächen sechsten Grades (Gleichung (26)). Die Flächen haben die Leitgeraden der Kongruenz zu (konjugiert imaginären) dreifachen Leitgeraden. Auf jeder Leitgeraden hat jede Fläche zwölf imaginäre Kuspidalpunkte. Die Regelscharen der Flächen gehen durch die Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3, durch die reellen Deckstrahlen $z_\mathrm{I}, z_\mathrm{II}$ der sekundären Involution J und durch den unendlichfernen Kongruenzstrahl. Diese Strahlen sind die sechs reellen Knotenstrahlen des Büschels. Achtzehn Knotenstrahlen entfallen auf die beiden Leitgeraden. Die übrigen zwölf Knotenstrahlen sind sechs Paare konjugiert imaginärer Kongruenzstrahlen zweiter Art, darunter die konjugiert imaginären Deckstrahlen j_1, j_2 der sekundären Involution J. Jede Fläche des Büschels B_1^6 hat ein (in der Kongruenz einscharig enthaltenes) Strahlenparaboloid zur Asymptotenfläche. Diese ∞^1 Asymptotenflächen bilden einen Büschel von Strahlenparaboloiden; sein Basisvierseit besteht aus den Leitgeraden, dem unendlichfernen Kongruenzstrahle und einem weiteren Kongruenzstrahle k, der im Falle $p=q=0$ mit dem Hauptstrahle der Kongruenz zusammenfällt.

Jede der ∞^1 Regelflächen des Büschels B_1^6 wird von den ∞^1 Regelflächen sechsten Grades eines zweiten Büschels B_2^6 längs ihrer Regelstrahlen in konjugierten Richtungen geschnitten. Jede Fläche des Büschels B_2^6 hat gleichfalls die beiden Leitgeraden der Kongruenz zu dreifachen Leitgeraden und besitzt auf jeder von ihnen zwölf imaginäre Kuspidalpunkte. Im übrigen hat der Büschel B_2^6 neun Paare konjugiert imaginärer Kongruenzstrahlen zweiter Art zu Knotenstrahlen.

Durch $\frac{n}{2}(n+3)-1$ Punkte P_i der Ebene gehen ∞^1 algebraische Kurven n-ter Ordnung; sie schneiden einander in $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ weiteren Punkten Q_i und bilden einen Büschel mit n^2 Knotenpunkten $P_i + Q_i$. Die Punkte P_i heißen die *bestimmenden* Punkte, die Q_i die *notwendigen*[13]). Für die lineare Kongruenz ist in diesem Zusammenhange zu folgern:

$3 \cdot \frac{n}{2} - 1$ *Kongruenzstrahlen bestimmen bei geradem n einen Büschel von ∞^1 Regelflächen n-ten Grades der Kongruenz. Die Flächen haben beide Leitgeraden der Kongruenz zu $\frac{n}{2}$-fachen Leitgeraden mit je $\frac{n}{2}(n-2)$ Kuspidalpunkten. Sie haben außerdem $\frac{n}{2}(n-3)+1$ reelle oder konjugiert imaginäre Kongruenzstrahlen gemein, so daß der Büschel außer den beiden Leitgeraden, deren jede einen Knotenstrahl vom Gewicht $\frac{n^2}{4}$ darstellt, $\frac{n^2}{2}$ Kongruenzstrahlen als Knotenstrahlen besitzt. Durch jeden anderen reellen Kongruenzstrahl geht eine Regelschar des Büschels.*

Ein Büschel von Regelflächen sechsten Grades mit zwei dreifachen Leitgeraden ist also durch acht Regelstrahlen bestimmt. In dem obigen Satze reichen die drei Regelstrahlen z_1, z_2, z_3 zusammen mit dem unendlichfernen Kongruenzstrahl aus, weil die vier Deckstrahlen der sekundären Involution J, nämlich z_1, z_{II}, j_1, j_2 als die übrigen bestimmenden Knotenstrahlen des Büschels B_1 festliegen.

Die Fig. 2 zeigt den Schnitt der Fluchtebene $z = 0$ mit dem Büschel B_1^6 von Regel-

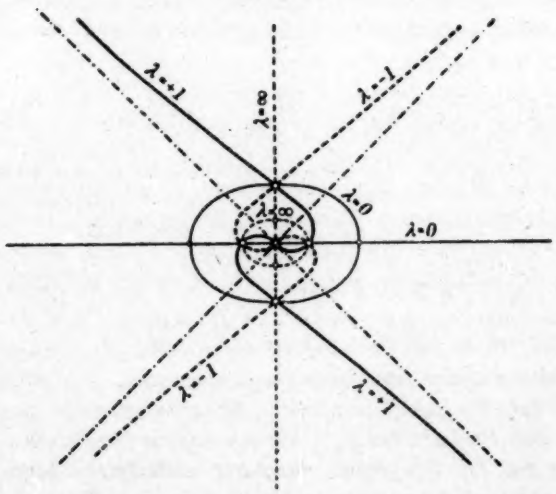


Fig. 2.

[13]) J. Steiner, Allg. Eigenschaften der alg. Kurven, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 47 (1848), S. 1—6 = Ges. Werke Bd. II, S. 495.

flächen sechsten Grades in der elliptischen linearen Kongruenz unter der Annahme $p = q = 0$. Die Schnittkurven des Büschels mit dieser Ebene bestehen aus dem unendlichfernen Kongruenzstrahle und ∞^1 Kurven fünfter Ordnung. Die beiden Flächen mit den Parameterwerten $\lambda = \pm 1$ besitzen je drei reelle Wenderegelstrahlen und haben je ein Strahlenparaboloid zur Asymptotenfläche. Ihre Schnittkurven mit der Fluchtebene sind die unendlichferne Gerade und die beiden Kurven mit den Parameterwerten $\lambda = \pm 1$ mit je drei reellen Wendepunkten und je einer Asymptote. Der Büschel B_1^6 enthält ferner zwei Flächen sechsten Grades ($\lambda = 0, \infty$), die je in eine Regelfläche vierten Grades vom Geschlecht eins und ein Strahlenparaboloid zerfallen. Ihre Schnittkurven sind die beiden Kurven vierter Ordnung mit den Parameterwerten $\lambda = 0, \infty$ (Cartesische Ovale) und die beiden Geradenpaare, welche die x- und die y-Achse mit der unendlichfernen Geraden bilden. Diese Geradenpaare sind die Schnitte mit den beiden zu den Flächen rechnenden Strahlenparaboloiden.

15. Die in Nr. 3 auftretende Substitution $z' = \frac{1}{z}$ ist das Bild der sekundären Involution J. Aus Nr. 2b und dem ersten Teil des Theorems Nr. 3 ist daher zu folgern:

Die beiden Büschel B_1^6, B_2^6 von Regelflächen sechsten Grades werden durch die sekundäre Involution J mit den beiden Büscheln $B_1'^6$, $B_2'^6$ von Regelflächen sechsten Grades (Gleichungen (28), (29)) vertauscht. Die ∞^1 Regelflächen sechsten Grades dieser beiden Büschel schneiden einander überall — abgesehen von den dreifachen Leitgeraden — längs Kongruenzstrahlen in konjugierten Richtungen. Die Knotenstrahlen der Büschel $B_1'^6$, $B_2'^6$ gehen bzw. aus denen der Büschel B_1^6, B_2^6 durch die sekundäre Involution J hervor. Der Büschel $B_1'^6$ hat demnach die reellen Knotenstrahlen $\mathfrak{d}_{11}, \mathfrak{d}_{12}, \mathfrak{d}_{13}, z_1, z_{11}$ (Fig. 1) sowie den Hauptstrahl, der dem unendlichfernen Kongruenzstrahl vermöge J entspricht; außerdem hat er sechs Paare konjugiert imaginärer Strahlen zweiter Art zu Knotenstrahlen, darunter die beiden konjugiert imaginären Deckstrahlen j_1, j_2 der sekundären Involution J. Der Büschel $B_2'^6$ hat neun Paare konjugiert imaginärer Strahlen zweiter Art zu Knotenstrahlen.

16. Aus Nr. 2c und 3 ergibt sich auf dem gleichen Wege folgendes:

Drei windschiefe Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3 bestimmen einen weiteren Büschel B_3^6 von ∞^1 Regelflächen sechsten Grades. Die Flächen haben die Leitgeraden der Kongruenz zu dreifachen Leitgeraden und auf jeder von ihnen zwölf imaginäre Kuspidalpunkte. Die drei Strahlen z_1, z_2, z_3 und die ihnen durch die sekundäre Involution J zugeordneten Strahlen $\mathfrak{d}_{11}, \mathfrak{d}_{12}, \mathfrak{d}_{13}$ (Fig. 1) sind die reellen Knotenstrahlen des Büschels B_3^6. Die übrigen Knotenstrahlen sind sechs Paare konjugiert imaginärer Strahlen zweiter Art.

Jede Regelfläche des Büschels B_3^6 wird längs ihrer ∞^1 Regelstrahlen von den ∞^1 Regelflächen sechsten Grades eines zweiten Büschels B_4^6 in konjugierten Richtungen geschnitten. Der Büschel B_4^6 hat keine reellen Knotenstrahlen, seine Flächen haben die Leitgeraden der Kongruenz zu dreifachen Leitgeraden und auf jeder von ihnen zwölf imaginäre Kuspidalpunkte.

Die Gleichungen der beiden Flächenbüschel lauten:

$$
(30)\quad B_3^6 \begin{cases} (q-\lambda p)[(1+z^2)^3-(x^2+y^2)^3]+3[A(xz-y)-\lambda B(x+yz)][(x^2+y^2)^2+(1+z)^2] \\ -9(x^2+y^2)(1+z^2)\{[(1+z^2)-(x^2+y^2)]\,q-[(1+z^2)+(x^2+y^2)]\lambda p\} \\ +6[(x^2-y^2)(1-z^2)+4xyz]\{[(1+z^2)-(x^2+y^2)]q+[(1+z^2)+(x^2+y^2)]\lambda p\} \\ -6(x+yz)(xz-y)[A(x+yz)+\lambda B(xz-y)] \\ -10A(xz-y)^3-10\lambda B(x+yz)^3=0 \end{cases}
$$

mit

$$
A = p^2+q^2-1\,,\quad B = p^2+q^2+1\,,
$$

(31) B_4^6 $\qquad f(x, y, z) + \lambda j(x, y, z) = 0\,,$

wo $f(x, y, z)$, $j(x, y, z)$ dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (27) und (29) haben.

Die sekundäre Involution J führt den Flächenbüschel B_3^6 in sich über und ebenso den Flächenbüschel B_4^6. Die ∞^1 Regelflächen jedes der beiden Büschel werden dabei involutorisch untereinander vertauscht. Die Doppelelemente der Involution im Büschel B_3^6 sind die beiden Regelflächen mit den Parameterwerten $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, im Büschel B_4^6 sind es die Regelflächen mit den Parameterwerten $\lambda = \pm 1$.

17. Aus Nr. 10 und den benutzten Abbildungsmethoden folgt weiter:

Die Regelflächen sechsten Grades der Büschel B_1^6, $B_1'^6$, B_2^6, $B_2'^6$, B_3^6, B_4^6 haben i. a. das Geschlecht vier und daher keine Doppelregelstrahlen, isolierte Regelstrahlen oder Rückkehrregelstrahlen. Jedoch liegen in jedem Büschel eine endliche Anzahl Flächen niederen Geschlechts. Ihre Parameterwerte λ_i sind die Wurzeln einer algebraischen Gleichung $R(\lambda) = 0$ vom 35. Grade. Sind deren Wurzeln alle verschieden, so enthält der Büschel 35 Flächen vom Geschlechte drei mit je einem Doppelregelstrahl.

Ausnahmen treten ein, wenn mehrere Wurzeln der Gleichung $R(\lambda) = 0$ zusammenfallen oder der Grad der Gleichung sich erniedrigt. So enthält z. B. der Büschel B_4^6 unter der Annahme $p = q = 0$ zwei rationale Regelflächen sechsten Grades, die eine ($\lambda = +1$) mit zwei Paaren konjugiert imaginärer Strahlen zweiter Art als Doppelregelstrahlen, die andere ($\lambda = -1$) mit vier reellen Doppelregelstrahlen. Der Büschel enthält ferner zwei Flächen sechsten Grades ($\lambda = 0, \infty$), die je in eine Regelfläche vierten Grades vom Geschlecht eins und ein Paar konjugiert imaginärer Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung zerfallen. Die Gleichung $R(\lambda) = 0$ reduziert sich hier auf die Form $\lambda^3 - \lambda = 0$.

18. Aus dem Inhalt der Nr. 4 folgern wir für die elliptische lineare Kongruenz:

Vier reelle Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3, z_4 bestimmen drei sekundäre Involutionen J_1, J_2, J_3 auf der elliptischen linearen Kongruenz. Die drei sekundären Involutionen bilden mit der Identität die Vierergruppe; aus je zweien von ihnen resultiert die dritte und aus allen dreien die Identität. Jede von ihnen vollzieht eine der drei möglichen Paarvertauschungen zwischen den vier Strahlen z_1, z_2, z_3, z_4. Es vertauschen:

J_1 *die Strahlen* z_1z_2 *mit* z_3z_4

J_2 *die Strahlen* z_1z_3 *mit* z_2z_4

J_3 *die Strahlen* z_1z_4 *mit* z_2z_3.

Jede der drei Involutionen besitzt ein Paar reeller Doppelstrahlen δ_1, δ_2 und ein Paar konjugiert imaginärer windschiefer Doppelstrahlen s_1, s_2. Die vier Doppelstrahlen jeder Involution werden durch die Leitgeraden der Kongruenz zu einem Tetraeder ergänzt. Die drei Paare reeller Doppelstrahlen

$$\delta_1\delta_2,\ \delta_3\delta_4,\ \delta_5\delta_6$$

sind die drei Schnittstrahlenpaare dreier einscharig in der Kongruenz enthaltenen reellen Flächen zweiten Grades; jede der drei Regelflächen ist für die beiden übrigen polarinvariant.

Die drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3 lassen sich analytisch auf folgende Normaldarstellung bringen[14]):

$$\begin{array}{lll}
J_1\colon \varrho p_1' = -p_4 & J_2\colon \varrho p_1' = -p_4 & J_3\colon \varrho p_1' = p_1 \\
\varrho p_4' = -p_1 & \varrho p_4' = -p_1 & \varrho p_4' = p_4 \\
\varrho p_5' = -p_5 & \varrho p_5' = p_5 & \varrho p_5' = -p_5 \\
\varrho p_6' = p_6 & \varrho p_6' = -p_6 & \varrho p_6' = -p_6\,.
\end{array}$$

[14]) G. Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der lin. Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **166** (1932), S. 167—181.

Ihre Deckstrahlenquadrupel haben die Koordinaten:

$\vartheta_1)$ $1:0:1:-1:0:1$ $\quad \vartheta_3)$ $-1:1:0:1:1:0$ $\quad \vartheta_5)$ $0:0:0:1:0:0$

$\vartheta_2)$ $1:0:-1:-1:0:-1$ $\quad \vartheta_4)$ $-1:-1:0:1:-1:0$ $\quad \vartheta_6)$ $1:0:0:0:0:0$

$s_1)$ $1:i:0:1:i:0$ $\quad s_3)$ $1:0:i:1:0:i$ $\quad s_5)$ $0:1:i:0:1:i$

$s_2)$ $1:-i:0:1:-i:0$ $\quad s_4)$ $1:0:-i:1:0:-i$ $\quad s_6)$ $0:-1:i:0:-1:i.$

19. Aus Nr. 5a läßt sich nun mit Leichtigkeit folgern:

Drei sekundäre Involutionen J_1, J_2, J_3 der elliptischen linearen Kongruenz, die mit der Identität die Vierergruppe bilden, führen zwei konjugierte Büschel B_1^8, B_2^8 von Regelflächen achten Grades der Kongruenz in sich über, indem sie jede Fläche achten Grades einzeln in sich transformieren. Jede Regelfläche beider Büschel hat die Leitgeraden der Kongruenz zu vierfachen Leitgeraden, sie enthält auf jeder Leitgeraden vierundzwanzig (imaginäre) Kuspidalpunkte. Ihre Regelstrahlen werden durch jede der drei sekundären Involutionen involutorisch gepaart.

Der Flächenbüschel B_1^8 hat acht reelle einfache Knotenstrahlen und zwar die beiden Quadrupel

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ und } z_1, z_{II}, z_{III}, z_{IV}.$$

Die Strahlen jedes Quadrupels werden durch die drei sekundären Involutionen paarweise vertauscht. Jede der beiden konjugiert imaginären Leitgeraden rechnet als Knotenstrahl des Büschels sechzehnfach. Die restlichen Knotenstrahlen des Büschels B_1^8 sind zwölf Paare konjugiert imaginärer Strahlen zweiter Art.

Jede Fläche achten Grades des Büschels B_1^8 wird in ihren ∞^1 Regelstrahlen von den ∞^1 Regelflächen achten Grades des Büschels B_2^8 in konjugierten Richtungen geschnitten. Die ∞^1 Flächen des Büschels B_2^8 haben die Leitgeraden der Kongruenz zu vierfachen Leitgeraden mit vierundzwanzig (imaginären) Kuspidalpunkten auf jeder von ihnen. Der Büschel B_2^8 besitzt keine reellen Knotenstrahlen.

Die Gleichungen der beiden Büschel von Regelflächen achten Grades lauten:

$$(32)\ B_1^8\begin{cases} (a+\lambda d)[(x^2+y^2)^2+(1+z^2)^2][(x^2-y^2)(1-z^2)+4xyz] \\ +(b+\lambda e)[(x^2+y^2)^2-(1+z^2)^2](xz-y)(x+yz) \\ +(c+\lambda f)(x^2+y^2)^2(1+z^2)^2 \\ +\lambda g[((x^2+y^2)^2+(1+z^2)^2)^2-16(xz-y)^2(x+yz)^2]=0 \end{cases}$$

$$(33)\ B_2^8\begin{cases} [(x^2+y^2)^4+(1+z^2)^4-16(xz-y)^2(x+yz)^2](1+\lambda) \\ +(a+\lambda d)(x^2+y^2)^2(1+z^2)^2 \\ +(b+\lambda e)[(x^2+y^2)^2+(1+z^2)^2][x^2-y^2)(1-z^2)+4xyz] \\ +(c+\lambda f)[(x^2+y^2)^2-(1+z^2)^2](xz-y)(x+yz)=0. \end{cases}$$

Die $a, b, \ldots, g$ hängen rational von den Koordinaten der Kongruenzstrahlen $z_1, \ldots, z_4$ ab.

20. Aus Nr. 5a, b folgt ganz entsprechend:

Vier Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3, z_4, welche die drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3 der Vierergruppe bedingen, bestimmen mit zwei gegebenen weiteren Kongruenzstrahlen a, b vier Paare Büschel von Regelflächen zwölften Grades:

$$B_0^{12}, B_0'^{12};\ B_1^{12}, B_1'^{12};\ B_2^{12}, B_2'^{12};\ B_3^{12}, B_3'^{12}.$$

Jede Fläche eines Büschels B_i^{12} wird von den ∞^1 Flächen des Büschels $B_i'^{12}$ längs ihrer ∞^1 Regelstrahlen in konjugierten Richtungen geschnitten. Die Regelflächen aller Büschel haben die Leitgeraden der Kongruenz zu sechsfachen Leitgeraden und enthalten auf jeder Leitgeraden sechzig imaginäre Kuspidalpunkte.

Aus den Flächen der beiden konjugierten Büschel B_0^{12}, $B_0'^{12}$ gehen die Flächen der drei übrigen Büschelpaare bzw. durch die drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3 hervor.

Jede der beiden Leitgeraden ist ein sechsunddreißigfacher Knotenstrahl für alle Flächenbüschel. Der Büschel B_0^{12} hat die vier Strahlen z_1, z_2, z_3, z_4, die sechs reellen Doppelstrahlen $\delta_1\delta_2, \delta_3\delta_4, \delta_5\delta_6$ der drei sekundären Involutionen J_i, und die beiden Strahlen a, b zu reellen einfachen Knotenstrahlen. Die drei Büschel B_i^{12} $(i = 1, 2, 3)$ haben die gleichen reellen Knotenstrahlen, nur treten an die Stelle von a, b je die beiden ihnen durch die sekundäre Involution J_i zugeordneten Kongruenzstrahlen a_i, b_i. Außerdem besitzt jeder der Büschel $B_0^{12}, \ldots, B_3^{12}$ sechzig paarweise konjugiert imaginäre Strahlen zweiter Art zu Knotenstrahlen. Die vier Flächenbüschel $B_0'^{12}, \ldots, B_3'^{12}$ haben (außer den Leitgeraden) je zweiundsiebzig paarweise konjugiert imaginäre Strahlen zweiter Art zu Knotenstrahlen.

Fallen die beiden Knotenstrahlen a, b mit einem der sechs reellen Knotenstrahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_6$ zusammen, so reduzieren sich die vier Paare von Flächenbüscheln auf zwei Paare Büschel von Regelflächen zehnten Grades

$$B_0^{10}, B_0'^{10} \text{ und } B_1^{10}, B_1'^{10}.$$

Die eine sekundäre Involution führt dann B_0^{10} und $B_0'^{10}$ je in sich über, die beiden anderen sekundären Involutionen verwandeln B_0^{10} und $B_0'^{10}$ in $B_1^{10}, B_1'^{10}$.

Jede Fläche des Büschels B_0^{10} und des Büschels B_1^{10} hat ein Strahlenparaboloid zur Asymptotenfläche; diese ∞^1 Asymptotenflächen erfüllen zweimal einen Büschel von Strahlenparaboloiden. Sein Basisvierseit besteht aus den Leitgeraden, dem Hauptstrahl und dem unendlichfernen Kongruenzstrahle.

Die Schnittkurven der in Nr. 13—19 behandelten Regelflächen mit der Fluchtebene der Kongruenz (xy-Ebene) sind mit den in I A behandelten Bildkurven dieser Regelflächen identisch und alle übrigen Schnitte senkrecht zum Hauptstrahl der Kongruenz ergeben Kurven vom gleichen affinen Typus.

B. Die hyperbolische lineare Kongruenz.

21. Bei der Untersuchung von Regelflächen des Grades $2n$ in der hyperbolischen linearen Kongruenz beginnen wir sogleich mit den Regelflächen achten Grades. Die Regelflächen sechsten Grades lassen sich mit Hilfe von Nr. 6—8 in Analogie zu den Theoremen der elliptischen linearen Kongruenz in Nr. 13—17 unter Berücksichtigung der andersgearteten Realitätsverhältnisse in der hyperbolischen Kongruenz behandeln.

Der Inhalt der Nr. 9 führt auf folgende Theoreme:

Vier Strahlen z_1, z_2, z_3, z_4 der hyperbolischen Kongruenz bestimmen die drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3, die jene vier Strahlen paarweise untereinander vertauschen. Die vier z_i können reelle oder konjugiert imaginäre Strahlen erster oder zweiter Art sein. Die drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3 bilden mit der Identität die Vierergruppe und gestatten in Plückerschen Linienkoordinaten die Normaldarstellungen[14]):

J_1:	J_2:	J_3:
$\varrho p_1' = p_4$	$\varrho p_1' = p_4$	$\varrho p_1' = p_1$
$\varrho p_4' = p_1$	$\varrho p_4' = p_1$	$\varrho p_4' = p_4$
$\varrho p_5' = -p_5$	$\varrho p_5' = p_5$	$\varrho p_5' = -p_5$
$\varrho p_6' = p_6$	$\varrho p_6' = -p_6$	$\varrho p_6' = -p_6$.

Jede der drei sekundären Involutionen hat vier Deckstrahlen, die je ein windschiefes Vierseit bilden und von den Leitgeraden der Kongruenz je zu einem Tetraeder ergänzt werden; ihre Linienkoordinaten sind:

δ_1) $-1:0:1:-1:0:-1$	δ_3) $1:i:0:1:i:0$	δ_5) $0:0:0:1:0:0$
δ_2) $-1:0:-1:-1:0:1$	δ_4) $1:-i:0:1:-i:0$	δ_6) $1:0:0:0:0:0$
s_1) $1:1:0:-1:1:0$	s_3) $-1:0:i:1:0:-i$	s_5) $0:1:1:0:1:-1$
s_2) $1:-1:0:-1:-1:0$	s_4) $-1:0:-i:1:0:i$	s_6) $0:-1:1:0:-1:-1$.

Aus jedem der drei Quadrupel läßt sich ein Paar herausgreifen, so daß die drei Paare Kongruenzstrahlen

$$\delta_1\delta_2,\ \delta_3\delta_4,\ \delta_5\delta_6$$

die drei Schnittstrahlenpaare dreier füreinander polarinvarianter Regelscharen zweiter Ordnung der Kongruenz sind. (In der dualkomplexen Bildebene (Nr. 9) entsprechen den Strahlen z_1, z_2, z_3, z_4 vier Nullstellen einer biquadratischen Funktion, den Kongruenzstrahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_6$ sechs Nullstellen ihrer Jacobischen Kovariante, den drei sekundären Involutionen J_i die drei dualkomplexen Inversionen nebst Spiegelungen. Die drei polarinvarianten Regelscharen haben drei gleichseitige Hyperbeln durch L_1, L_2 zu Bildern.) Umgekehrt erhält man den Satz:

Drei füreinander polarinvariante Regelscharen zweiter Ordnung der hyperbolischen linearen Kongruenz schneiden einander in drei Paar Regelstrahlen $\delta_1\delta_2$, $\delta_3\delta_4$, $\delta_5\delta_6$; zwei Paare sind reelle Kongruenzstrahlen, das dritte Paar besteht aus konjugiert imaginären Kongruenzstrahlen zweiter Art. Die drei Strahlenpaare sind Doppelstrahlenpaare dreier sekundärer Involutionen J_1, J_2, J_3, die mit der Identität die Vierergruppe bilden. Jedes der drei Strahlenpaare $\delta_i\delta_k$ bildet mit dem zweiten Paar Doppelstrahlen $s_i s_k$ seiner sekundären Involution ein windschiefes Vierseit, das die Leitgeraden der Kongruenz zu einem Tetraeder ergänzen.

22. Im Anschluß an Nr. 9a, b, c entstehen nunmehr folgende Theoreme für die hyperbolische lineare Strahlenkongruenz:

Vier Kongruenzstrahlen z_i bestimmen einen Büschel von Regelflächen achten Grades B_1^8. Jede Regelfläche achten Grades des Büschels hat die Leitgeraden der Kongruenz zu vierfachen Leitgeraden und enthält auf jeder Leitgeraden vierundzwanzig reelle Kuspidalpunkte. Sie ist gegen die drei sekundären Involutionen der durch die z_i bedingten Vierergruppe invariant; ihre Regelstrahlen werden dabei durch jede der drei sekundären Involutionen involutorisch vertauscht.

Jede der beiden Leitgeraden ist ein sechzehnfacher Knotenstrahl des Büschels B_1^8. Die übrigen zweiunddreißig Knotenstrahlen können reelle oder konjugiert imaginäre Strahlen erster oder zweiter Art sein. Sie zerfallen in zwei Gruppen zu je sechzehn; die sechzehn Strahlen jeder Gruppe werden durch die drei sekundären Involutionen J_i untereinander vertauscht.

Die ∞^1 Flächen des Büschels B_1^8 werden von den ∞^1 Regelflächen achten Grades eines zweiten Büschels B_2^8 längs ihrer Regelstrahlen in konjugierten Richtungen geschnitten. Die Flächen des Büschels B_2^8 haben gleichfalls die Leitgeraden der Kongruenz zu vierfachen Leitgeraden mit je vierundzwanzig reellen Kuspidalpunkten, jedoch besitzt B_2^8 keine weiteren reellen Knotenstrahlen. Die drei sekundären Involutionen J_i der Vierergruppe führen jede Regelfläche achten Grades des Büschels B_2^8 in sich über.

Die Gleichungen der beiden Flächenbüschel sind:

$$(34)\ B_1^8\left\{\begin{aligned}&(a+\lambda d)[(x^2-y^2)^2+(1-z^2)^2][(x^2+y^2)(1+z^2)+4xyz]\\&+(b+\lambda e)[(x^2-y^2)^2-(1-z^2)^2](xz+y)(x+yz)\\&+(c+\lambda f)(x^2-y^2)^2(1-z^2)^2\\&+\lambda g[((x^2-y^2)^2+(1-z^2)^2)^2+16(xz+y)^2(x+yz)^2]=0\end{aligned}\right.$$

$$(35)\ B_2^8\left\{\begin{aligned}&[(x^2-y^2)^4+(1-z^2)^4+16(xz+y)^2(x+yz)^2](1+\lambda)\\&+(a+\lambda d)(x^2-y^2)^2(1-z^2)^2\\&+(b+\lambda e)[(x^2+y^2)(1+z^2)+4xyz][(x^2-y^2)^2+(1-z^2)^2]\\&+(c+\lambda f)[(x^2-y^2)^2-(1-z^2)^2](xz+y)(x+yz)=0\,.\end{aligned}\right.$$

Die $a, \ldots, g$ hängen rational von den Koordinaten der Kongruenzstrahlen $z_1, \ldots, z_4$ ab.

Die Betrachtung der Funktion $w = \dfrac{J(z)}{f_4(z)(z-a)(z-b)}$ in Nr. 9c liefert uns folgende Sätze:

Vier Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3, z_4, die drei sekundäre Involutionen J_1, J_2, J_3 einer Vierergruppe bedingen, bestimmen mit zwei gegebenen weiteren Kongruenzstrahlen a, b vier Paare Büschel von Regelflächen zwölften Grades:

$$B_0^{12}, B_0'^{12};\ B_1^{12}, B_1'^{12};\ B_2^{12}, B_2'^{12};\ B_3^{12}, B_3'^{12}.$$

Jede Fläche eines Büschels B_i^{12} wird von den ∞^1 Flächen des Büschels $B_i'^{12}$ längs ihrer ∞^1 Regelstrahlen in konjugierten Richtungen geschnitten. Die Flächen aller Büschel haben die Leitgeraden der Kongruenz zu sechsfachen Leitgeraden mit sechzig reellen Kuspidalpunkten auf jeder von ihnen.

Aus den Flächen der konjugierten Büschel $B_0^{12}, B_0'^{12}$ gehen die Flächen der drei übrigen Büschelpaare bzw. durch die drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3 hervor.

Jede der beiden Leitgeraden ist ein sechsunddreißigfacher Knotenstrahl für alle Flächenbüschel. Außerdem hat jeder Büschel B_i^{12} $(i = 0, 1, 2, 3)$ zweiundsiebzig Knotenstrahlen und zwar reelle oder konjugiert imaginäre Strahlen erster oder zweiter Art. Unter ihnen befinden sich die vier Strahlen $z_1, \ldots, z_4$ und die zwölf Doppelstrahlen der drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3. Zu den reellen einfachen Knotenstrahlen des Büschels B_0^{12} gehören die Strahlen a, b. Die drei anderen Büschel B_i^{12} haben an Stelle von a, b die diesen durch die sekundären Involutionen J_i zugeordneten Kongruenzstrahlen zu Knotenstrahlen. Die vier Flächenbüschel $B_i'^{12}$ besitzen außer den beiden reellen Leitgeraden zweiundsiebzig Knotenstrahlen, deren Realitätsverhältnisse von z_1, z_2, z_3, z_4 abhängen.

Fallen die beiden Strahlen a, b mit einem der Doppelstrahlen $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_6$ der sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3 zusammen, so reduzieren sich die vier Paare von Flächenbüscheln auf zwei Büschelpaare von Regelflächen zehnten Grades:

$$B_0^{10}, B_0'^{10} \text{ und } B_1^{10}, B_1'^{10}.$$

Die eine sekundäre Involution führt $B_0^{10}, B_0'^{10}$ in sich über, jede der beiden anderen verwandelt $B_0^{10}, B_0'^{10}$ in $B_1^{10}, B_1'^{10}$. Jede Fläche der vier Büschel hat die Leitgeraden der Kongruenz zu fünffachen Leitgeraden mit je vierzig reellen Kuspidalpunkten.

Die Schnittkurven der behandelten Regelflächen mit der Fluchtebene der Kongruenz (xy-Ebene) sind mit ihren Bildkurven im Abschnitt I B identisch und alle übrigen Schnitte senkrecht zum Hauptstrahl der Kongruenz ergeben Kurven vom gleichen affinen Typus.

Eingegangen 3. November 1941.

Neues Beispiel einer genetisch darstellbaren Berührungstransformation.

Von *Gerhard Kowalewski* in Prag.

Sophus Lie hat gezeigt, daß die Fußpunkttransformation durch eine infinitesimale Transformation erzeugt werden kann, daß sie also, wie ich zu sagen pflege, *genetisch darstellbar* ist. Ich habe vor einigen Jahren ein zweites Beispiel einer genetisch darstellbaren Berührungstransformation angegeben, indem ich zeigte, daß ein Polarsystem, d. h. eine Legendresche Berührungstransformation, die genetische Darstellung gestattet, wobei man allerdings ins Imaginäre heineingehen muß. Hier will ich jetzt ein weiteres Beispiel vorführen, wo die genetische Darstellung im Reellen vor sich geht.

Auf der Normalen des Linienelements x, y, y' wählen wir einen Punkt X, Y, der gleichweit von x, y und vom Anfangspunkt entfernt ist, also die beiden Gleichungen

$$X - x + (Y - y)y' = 0,$$
$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 = X^2 + Y^2$$

erfüllt. Die zweite Gleichung reduziert sich auf

$$Xx + Yy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 0$$

oder

$$(X - x)x + (Y - y)y + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 0$$

und liefert in Verbindung mit der ersten

$$X - x = -\frac{(x^2 + y^2)y'}{2(xy' - y)},$$
$$Y - y = \frac{x^2 + y^2}{2(xy' - y)}.$$

Dem Linienelement x, y, y' wird also der Punkt

$$(1) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{(x^2 - y^2)y' - 2xy}{2(xy' - y)}, \\ Y = \dfrac{2xyy' + x^2 - y^2}{2(xy' - y)} \end{cases}$$

zugeordnet. Berechnet man $dY:dX$ oder Y', so ergibt sich

$$(1') \qquad Y' = -\frac{x}{y}.$$

Es handelt sich also um eine Berührungstransformation. (1) und (1') ist ihre Darstellung in cartesischen Koordinaten. Läßt man diese Berührungstransformation

auf eine Gerade wirken, die nicht durch den Anfangspunkt hindurchgeht, so entsteht eine Parabel, deren Leitlinie jene Gerade und deren Brennpunkt der Anfangspunkt ist. Von diesem Spezialfall ausgehend bin ich auf die Berührungstransformation (1),(1′) gekommen. Ich habe die Beziehung zwischen Leitlinie und Parabel, wobei der Anfangspunkt als Brennpunkt dient, einer Berührungstransformation eingeordnet. Ihre aequatio directrix lautet

$$(X-x)^2+(Y-y)^2=X^2+Y^2.$$

Dem Punkt P entspricht das Mittellot von OP.

Um nun für diese Berührungstransformation die genetische Darstellung zu gewinnen, muß ich sie dem Lieschen Gedankengang folgend n-mal wiederholen. Das gelingt sehr leicht, wenn ich sie in Polarkoordinaten schreibe, wobei es bequem ist, von der Fassung

$$X=\frac{(x^2-y^2)dy-2xydx}{2(xdy-ydx)},$$
$$Y=\frac{2xydy+(x^2-y^2)dx}{2(xdy-ydx)},$$
$$Y'=-\frac{x}{y}$$

auszugehen. Es ergibt sich dann sofort die Formulierung

$$(2)\qquad \begin{cases} X=\dfrac{x(xdy-ydx)-y(xdx+ydy)}{2(xdy-ydx)}, \\ Y=\dfrac{y(xdy-ydx)+x(xdx+ydy)}{2(xdy-ydx)}, \\ Y'=-\dfrac{x}{y}, \end{cases}$$

die für den Übergang zu Polarkoordinaten am geeignetsten ist. Man findet mit Hilfe von

$$xdy-ydx=r^2d\varphi,\quad xdx+ydy=rdr$$

ganz mühelos

$$(3)\qquad \begin{cases} R\cos\Phi=\frac{1}{2}r\cos\varphi-\frac{1}{2}r'\sin\varphi, \\ R\sin\Phi=\frac{1}{2}r\sin\varphi+\frac{1}{2}r'\cos\varphi. \end{cases}$$

Aus (2) ergibt sich ferner für

$$XY'-Y \text{ oder } \frac{R^2d\Phi}{dX}$$

der Ausdruck

$$-\frac{x^2+y^2}{2y}$$

und für

$$X+YY'$$

der Ausdruck

$$-\frac{(x^2+y^2)(xdx+ydy)}{2y(xdy-ydx)}.$$

Es ist also

$$\frac{XdX+YdY}{XdY-YdX}=\frac{xdx+ydy}{xdy-ydx},$$

d. h.

$$(3')\qquad \frac{R'}{R}=\frac{r'}{r}.$$

Aus (3) entnimmt man

$$R = \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 + r'^2}$$

und

$$\tan\Phi = \frac{\tan\varphi + \frac{r'}{r}}{1 - \frac{r'}{r}\tan\varphi},$$

also

$$\Phi = \varphi + \operatorname{arc\,tan}\frac{r'}{r}.$$

Unsere Berührungstransformation läßt sich demnach in Polarkoordinaten folgendermaßen darstellen, wobei wir statt R, Φ lieber r_1, φ_1 schreiben:

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi + \operatorname{arc\,tan}\dfrac{r'}{r}, \\ r_1 = r \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\dfrac{r'}{r}\right)^2}, \\ \dfrac{r_1'}{r_1} = \dfrac{r'}{r}. \end{cases}$$

Wird sie n-mal ausgeübt, so ergibt sich

$$(4_n) \qquad \begin{cases} \varphi_n = \varphi + n \operatorname{arc\,tan}\dfrac{r'}{r}, \\ r_n = r\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\dfrac{r'}{r}\right)^2}\right)^n, \\ \dfrac{r_n'}{r_n} = \dfrac{r'}{r}. \end{cases}$$

Hier liegt nun, wenn man n nicht nur auf die Werte $1, 2, 3, \ldots$ beschränkt, eine eingliedrige Gruppe mit dem Parameter n vor. Sie wird durch folgende infinitesimale Transformation erzeugt:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t} = \operatorname{arc\,tan}\frac{r'}{r},$$

$$\frac{\delta r}{\delta t} = r \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}\right),$$

$$\frac{\delta r'}{\delta t} = r' \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}\right).$$

Das Liesche Symbol lautet:

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi} \operatorname{arc\,tan}\frac{r'}{r} + \left(r\frac{\partial f}{\partial r} + r'\frac{\partial f}{\partial r'}\right) \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}\right),$$

die charakteristische Funktion hat folgendes Aussehen:

$$r' \operatorname{arc\,tan}\frac{r'}{r} - r \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}\right).$$

Die Brüder Bernoulli haben verschiedene Transformationen entdeckt, aus denen die logarithmische Spirale $r = e^{m\varphi}$ gestaltlich unverändert hervorgeht. (Eadem mutata resurgo, so kann sie von sich sagen.) Hier fanden wir eine eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, nämlich die Gruppe (4_n), durch welche der Kreis jener Bernoullischen Transformationen noch erweitert wird.

Übertragung auf den Raum.

Die hier betrachtete ebene Berührungstransformation (1) läßt sich in naheliegender Weise im Raume nachbilden. Man errichtet auf der Ebene des Flächenelements x, y, z, p, q im Punkte x, y, z ein Lot und sucht auf ihm denjenigen Punkt X, Y, Z auf, der von x, y, z und vom Anfangspunkt gleichweit entfernt ist. Es ergibt sich

$$X = x + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)p}{2(z - xp - yq)},$$

$$Y = y + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)q}{2(z - xp - yq)},$$

$$Z = z - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2(z - xp - yq)}.$$

Rechnet man P, Q aus, so findet man

$$P = -\frac{x}{z}, \quad Q = -\frac{y}{z}.$$

Es liegt also eine Berührungstransformation vor.

Wenn man diese Transformation iteriert, so liegen die Punkte der sich ergebenden Flächenelemente x, y, z, p, q; X, Y, Z, P, Q; ... alle in einer Ebene, auf der die Ebenen der Flächenelemente senkrecht stehen. Alle Flächenelemente, deren Punkte in einer Ebene ε durch den Anfangspunkt liegen und deren Ebenen senkrecht auf E stehen, schneiden E in Linienelementen, die durch die vorhin betrachtete ebene Berührungstransformation und ihre Iterationen transformiert werden. Hierauf beruht es, daß auch für die räumliche Berührungstransformation die genetische Darstellung durchgeführt werden kann. Entsprechendes gilt für die höheren Räume.

Eingegangen 9. Oktober 1941.

Über die Berechnung der Grundeinheit in reellen quadratischen Körpern und Ringen.

Von *Oskar Perron* in München.

Sei D eine natürliche Zahl mit irrationaler Quadratwurzel. Dann besteht der Ring $R = \mathfrak{R}(1, \sqrt{D})$ aus lauter ganzen algebraischen Zahlen. Seine Grundeinheit werde mit ε bezeichnet. Bekanntlich ist

$$\varepsilon = x + y\sqrt{D},$$

wobei x, y das kleinste Paar natürlicher Zahlen bedeutet, das die Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1$$

erfüllt. Dieses Paar findet man durch Entwicklung von $\sqrt{D}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch, der bekanntlich periodisch ist[1]):

$$\sqrt{D} = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_k}].$$

Dabei sei k die Gliederzahl der *primitiven* Periode. Auf bekannte Symmetrie-Eigenschaften der b_ν kommt es hier nicht an. Bezeichnet man in Übereinstimmung mit „Kettenbrüche" die Näherungsbrüche mit

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = [b_0, b_1, \ldots, b_\nu]$$

und die vollständigen Quotienten mit

$$\frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu} = [b_\nu, b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ldots],$$

so sind die P_ν, Q_ν ganze Zahlen (Kettenbrüche S. 75) und es gelten die Formeln

(1) $\quad P_\nu + P_{\nu+1} = b_\nu Q_\nu,$

(2) $\quad D - P_\nu^2 = Q_\nu Q_{\nu-1},$ } (Kettenbrüche S. 83)

(3) $\quad P_0 = 0,\ Q_0 = Q_k = 1,$

(4) $\quad 1 \leqq P_\nu \leqq b_0$ für $\nu \geqq 1,$

(5) $\quad 2 \leqq Q_\nu \leqq 2b_0$ für $1 \leqq \nu \leqq k-1,$ } (Kettenbrüche S. 93)

(6) $\quad A_{\nu-1}^2 - DB_{\nu-1}^2 = (-1)^\nu Q_\nu.$ (Kettenbrüche S. 102)

Insbesondere ist daher

$$A_{k-1}^2 - DB_{k-1}^2 = (-1)^k,$$

und die Grundeinheit ε des Ringes R ist

$$\varepsilon = A_{k-1} + B_{k-1}\sqrt{D}.$$

[1]) Näheres findet man in des Verfassers Buch: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1913; 2. Aufl. 1929. Wird im Text unter „Kettenbrüche" zitiert.

Ist D quadratfrei und $D \not\equiv 1 \pmod 4$, so ist der Ring R identisch mit dem Einheitsideal des Körpers $\mathfrak{R}(\sqrt{D})$, und die Grundeinheit des Ringes ist zugleich die Grundeinheit des Körpers.

Ist $D \equiv 1 \pmod 4$, so besteht auch der Ring $R_1 = \mathfrak{R}\left(1, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\right)$ aus lauter ganzen algebraischen Zahlen, und zwar enthält er außer den Zahlen von R noch alle Zahlen der Form $\frac{a+b\sqrt{D}}{2}$, wo a, b ungerade Zahlen sind, und nur diese. Die Grundeinheit von R_1 bezeichnen wir mit ε_1. Ist D quadratfrei, so ist der Ring R_1 identisch mit dem Einheitsideal des Körpers $\mathfrak{R}(\sqrt{D})$, und die Grundeinheit des Ringes ist zugleich die Grundeinheit des Körpers.

Wenn es unter den Zahlen $\frac{a+b\sqrt{D}}{2}$ mit ungeraden a, b keine Einheit gibt, wenn also die Forderung

(7) $$x^2 - Dy^2 = \pm 4 \quad (x, y \text{ ungerade natürliche Zahlen})$$

nicht erfüllbar ist, so ist die Grundeinheit von R_1 identisch mit der von R, also $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Da das Quadrat einer ungeraden Zahl stets $\equiv 1 \pmod 8$ ist, folgt aus (7) sofort: $1 - D \equiv 4 \pmod 8$. Folglich ist im Fall $D \equiv 1 \pmod 8$ die Forderung (7) nicht erfüllbar, also $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

Von jetzt an sei daher

(8) $$D \equiv 5 \pmod 8.$$

Wenn die Gleichung (7) lösbar ist und wenn $x = a$, $y = b$ das kleinste Lösungspaar ist, so ist

$$\varepsilon_1 = \frac{a+b\sqrt{D}}{2}.$$

Man sieht leicht, worauf es uns aber hier nicht ankommt, daß dann ε_1^3 dem Ring R angehört und zwar die Grundeinheit dieses Ringes ist, also $\varepsilon_1^3 = \varepsilon$.

Nun lehren die Formeln

$$1^2 - 5 \cdot 1^2 = -4, \quad 3^2 - 13 \cdot 1^2 = -4,$$

daß für $D = 5$ und $D = 13$ die Gleichung (7) lösbar ist, und das in den Formeln enthaltene Lösungspaar ist offenbar das kleinste. Daher ist

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ bzw. } \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

die Grundeinheit von $\mathfrak{R}\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ und von $\mathfrak{R}(\sqrt{5})$ bzw. von $\mathfrak{R}\left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ und von $\mathfrak{R}(\sqrt{13})$.

Von jetzt an sei daher $D > 13$, wegen (8) also $D \geqq 21$, also gewiß $4 < \sqrt{D}$. Wir fragen, wie man mittels der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{D}$ die Lösbarkeit der Gleichung (7) entscheiden und gegebenenfalls die Lösung finden kann. Nun ist zunächst klar, daß bei einer Lösung von (7) die Zahlen x, y teilerfremd sind. Da nun aber $4 < \sqrt{D}$ ist, so ist für jedes solche Lösungspaar x, y der Quotient $\frac{x}{y}$ ein Näherungsbruch des Kettenbruches von $\sqrt{D}$ (Kettenbrüche S. 102), also etwa $x = A_{\nu-1}$, $y = B_{\nu-1}$. Antwort auf unsere Frage erhält man daher, wenn man die verschiedenen Näherungsbrüche hernimmt und zusieht, ob einmal $A_{\nu-1}^2 - DB_{\nu-1}^2 = \pm 4$ ist; die $A_{\nu-1}$, $B_{\nu-1}$ sind dann offenbar von selbst ungerade. Nach (6) besagt das aber: $Q_\nu = 4$.

Man braucht daher nur die Kettenbruchentwicklung wirklich durchzuführen und darauf zu achten, ob in der Periode der vollständigen Quotienten

$$\frac{\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

einmal $Q_\nu = 4$ vorkommt; nach bekannten Symmetrie-Eigenschaften muß das dann sogar schon einmal für $\nu \leqq \frac{k}{2}$ eintreten (Kettenbrüche S. 89f., Satz 10). Kommt niemals $Q_\nu = 4$ vor, so ist die Forderung (7) unerfüllbar, also $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Andernfalls ist, wenn ν der kleinste Index mit $Q_\nu = 4$ ist, die Grundeinheit ε_1 gleich

$$\frac{A_{\nu-1}+B_{\nu-1}\sqrt{D}}{2} \qquad (\text{und} \quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon).$$

Für $D < 2012$ kann man sich aber diese ganze Arbeit sparen; denn da gibt es Tafeln, in denen die b_ν und die Q_ν tabelliert sind (Kettenbrüche S. 100). Man kann also ohne weiteres der Tafel entnehmen, ob einmal $Q_\nu = 4$ ist, und kann gegebenenfalls die zugehörigen $A_{\nu-1}$, $B_{\nu-1}$ nach den bekannten Rekursionsformeln für die Näherungszähler und -Nenner (Kettenbrüche S. 28) berechnen. In der kürzlich herausgekommenen Tafel von Patz, die bis $D = 10002$ reicht[2]), sind aber nur die b_ν tabelliert; die Aufnahme der Q_ν war nicht möglich. *Trotzdem kann man aber auch für diese D die ganze Arbeit der Kettenbruchentwicklung ebenso sparen, wie wenn die Q_ν dastehen würden.* Denn im folgenden wird gezeigt, daß man mit einem Blick auf die Reihe der b_ν sofort sehen kann, ob und gegebenenfalls für welches ν einmal $Q_\nu = 4$ wird. Es gilt nämlich der folgende Satz, bei dem übrigens die Voraussetzung $D \equiv 5 \pmod 8$ gar nicht nötig ist:

Satz. *Sei c eine natürliche Zahl. Wenn dann für $\nu > 0$ einmal $Q_\nu = c$ ist, so liegt b_ν im Intervall*

$$\frac{2b_0+2}{c} - 2 \leqq b_\nu \leqq \frac{2b_0}{c}.$$

Für genügend großes D und zwar mindestens für $D > c^4$ gilt auch das Umgekehrte: Wenn einmal b_ν in dem angegebenen Intervall liegt, so ist $Q_\nu = c$.

Dieser Satz ist für $c = 1$, für $c = 2$ und für $c > 2b_0$ lediglich Ausdruck bekannter Tatsachen; im übrigen ist er neu. Hier interessiert er uns speziell für $c = 4$. Man sieht sofort, daß in diesem Fall genau *zwei* ganze Zahlen in dem für b_ν angegebenen Intervall liegen[3]), nämlich, wenn in üblicher Weise mit $[\alpha]$ die größte in α enthaltene ganze Zahl bezeichnet wird, die beiden Zahlen $[\frac{1}{2}b_0]$ und $[\frac{1}{2}b_0] - 1$. Wir formulieren für $c = 4$ als Corollar noch die folgende leicht abgeschwächte Aussage:

Corollar. *Für $D > 256$ ist dann und nur dann $Q_\nu = 4$, wenn b_ν einen der beiden Werte $[\frac{1}{2}b_0]$ oder $[\frac{1}{2}b_0] - 1$ hat.*

Beweis des Satzes. Nach den Formeln (1) bis (5) ist

$$b_\nu = \frac{P_\nu + P_{\nu+1}}{Q_\nu} \leqq \frac{2b_0}{Q_\nu}. \tag{9}$$

Andererseits folgt aus den Formeln (1) bis (5) für $\nu > 0$ auch

$$D - P_\nu^2 = Q_{\nu-1}Q_\nu = \frac{P_{\nu-1}+P_\nu}{b_{\nu-1}}Q_\nu \leqq \frac{b_0+P_\nu}{1}Q_\nu.$$

Daher ist

$$P_\nu^2 + P_\nu Q_\nu \geqq D - b_0 Q_\nu > b_0^2 - b_0 Q_\nu.$$

---

[2]) Wilhelm Patz, Tafel der regelmäßigen Kettenbrüche für die Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen von 1—10000. Leipzig 1941.

[3]) Allgemeiner gilt folgendes: Für $2b_0 \equiv -1 \pmod c$, also insbesondere für $c = 1$ immer, liegt nur *eine* ganze Zahl in dem angegebenen Intervall. Für $2b_0 \not\equiv -1 \pmod c$ liegen genau *zwei* darin.

Addiert man $\frac{1}{4}Q_\nu^2$ und zieht die Quadratwurzel, so kommt

$$P_\nu + \tfrac{1}{2}Q_\nu > b_0 - \tfrac{1}{2}Q_\nu \text{ also } P_\nu > b_0 - Q_\nu;$$

folglich wegen der Ganzzahligkeit von b_0, P_ν, Q_ν:

$$P_\nu \geqq b_0 + 1 - Q_\nu.$$

Daher ist

$$b_\nu = \left[\frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu}\right] \geqq \left[\frac{b_0 + b_0 + 1 - Q_\nu}{Q_\nu}\right] = \left[\frac{2b_0 + 1}{Q_\nu}\right] - 1.$$

Wegen der Ganzzahligkeit von b_ν besagt das genau soviel wie

$$b_\nu > \frac{2b_0 + 1}{Q_\nu} - 2$$

und das wieder, weil auch b_0 und Q_ν ganze Zahlen sind und $Q_\nu > 0$ ist, genau soviel wie

$$b_\nu \geqq \frac{2b_0 + 2}{Q_\nu} - 2.$$

In Verbindung mit (9) gibt das die Doppelungleichung

$$\frac{2b_0 + 2}{Q_\nu} - 2 \leqq b_\nu \leqq \frac{2b_0}{Q_\nu} \qquad \text{(für } \nu > 0\text{).} \tag{10}$$

Hieraus entnehmen wir zunächst

I. Für $Q_\nu = c$ ist

$$\frac{2b_0 + 2}{c} - 2 \leqq b_\nu \leqq \frac{2b_0}{c},$$

womit die erste Hälfte des Satzes bereits bewiesen ist. Sodann entnehmen wir aus (10) weiter:

Für $Q_\nu > c$ ist

$$\frac{2b_0}{c+1} \geqq \frac{2b_0}{Q_\nu} \geqq b_\nu;$$

für $c > 1$ und $Q_\nu < c$ ist

$$\frac{2b_0 + 2}{c-1} - 2 \leqq \frac{2b_0 + 2}{Q_\nu} - 2 \leqq b_\nu.$$

Durch Zusammenfassung beider Aussagen ergibt sich

II. Für

$$\frac{2b_0}{c+1} < b_\nu < \frac{2b_0 + 2}{c-1} - 2 \text{ ist } Q_\nu = c,$$

wobei die zweite Hälfte der Ungleichung im Fall $c = 1$ wegfällt. Wenn nun

$$\frac{2b_0}{c+1} < \frac{2b_0 + 2}{c} - 2 \text{ und für } c > 1 \text{ auch } \frac{2b_0}{c} < \frac{2b_0 + 2}{c-1} - 2,$$

d. h. nach leichter Umrechnung, wenn $b_0 > c^2 - 1$, also $b_0 \geqq c^2$, $D > c^4$, so folgt aus II:

IIa. Für

$$\frac{2b_0 + 2}{c} - 2 \leqq b_\nu \leqq \frac{2b_0}{c} \text{ ist } Q_\nu = c.$$

Damit ist auch die zweite Hälfte des Satzes bewiesen.

Die Verwendung des Corollars zur Entscheidung unserer Frage über die Grundeinheit ε_1 im Fall $D \equiv 5 \pmod 8$ illustrieren wir jetzt durch drei Beispiele.

Beispiel I. $D = 6021$. In der Patzschen Tafel findet sich die Angabe

$$77(1, 1, 2, 7, 1, 3, 3, 5, 4, 4, 13, 1, 6, 1, 4^*, \ldots, 154).$$

Es ist also $b_0 = 77$, $[\frac{1}{2}b_0] = 38$. Da in der Klammer weder 38 noch 37 vorkommt, ist niemals $Q_\nu = 4$, also ist $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

Beispiel II. $D = 6157$. Die Patzsche Tafel gibt

$$78\,(2, 6, 1, 38, 2, 1, 2^*, \ldots, 156).$$

Es ist also $b_0 = 78$, $[\frac{1}{2}b_0] = 39$. Da $b_4 = 38 = 39 - 1$ ist, so ist $Q_4 = 4$ und die Grundeinheit ε_1 ist gleich

$$\frac{A_3 + B_3\sqrt{6157}}{2} \quad (\text{und } \varepsilon_1^3 = \varepsilon).$$

Die Ausrechnung ergibt $A_3 = 1177$, $B_3 = 15$.

Beispiel III. $D = 6285$. Die Patzsche Tafel gibt

$$79\,(3, 1, 1, 2, 14, 39, 1, 1, 3, 10^*, \ldots, 158).$$

Es ist also $b_0 = 79$, $[\frac{1}{2}b_0] = 39$. Da $b_6 = 39$ ist, so ist $Q_6 = 4$ und die Grundeinheit ε_1 ist gleich

$$\frac{A_5 + B_5\sqrt{6285}}{2} \quad (\text{und } \varepsilon_1^3 = \varepsilon).$$

Die Ausrechnung ergibt $A_5 = 20533$, $B_5 = 259$.

Man sieht, die Sache geht spielend, und wer sehr an der Frage interessiert ist, ob $\varepsilon_1 = \varepsilon$ oder $\varepsilon_1^3 = \varepsilon$ ist, hat nunmehr die Möglichkeit, von den 1218 Zahlen D der Patzschen Tafel, die $\equiv 5 \pmod 8$ und > 256 sind, in ein bis zwei Mußestunden die mit $\varepsilon_1 = \varepsilon$ etwa rot und die mit $\varepsilon_1^3 = \varepsilon$ blau anzustreichen. Die Zahlen 5 und 13 bekommen sodann nach den obigen Feststellungen einen blauen Strich, und für die 30 Zahlen im Intervall $21 \leqq D < 256$ kann der Farbstrich ergänzt werden entweder nach der Tafel von Degen, die die Q_ν angibt, oder auch, wenn man sie nicht hat, durch direkte Berechnung der (b_ν, P_ν und) Q_ν nach dem in den Vorbemerkungen zur Patzschen Tafel beschriebenen abgekürzten Rekursionsverfahren. Dieses liefert in einer halben Stunde folgendes Resultat:

Rot: 37, 101, 141, 189, 197.

Blau: 21, 29, 45, 53, 61, 69, 77, 85, 93, 109, 117, 125, 133, 149, 157, 165, 173, 181, 205, 213, 221, 229, 237, 245, 253.

Die wirkliche Berechnung von ε_1 und ε wird allerdings im allgemeinen nicht so bequem sein wie bei ε_1 in den obigen Beispielen II und III. Die Perioden sind vielfach sehr lang und die $A_{\nu-1}$, $B_{\nu-1}$ können Zahlenungeheuer von 50 bis 100 Stellen werden.

Ich benutze diese Gelegenheit, um in den erwähnten Vorbemerkungen zur Patzschen Tafel einen störenden Druckfehler richtig zu stellen. Die Formel (3) Seite XIII muß lauten:

$$Q_{n+1} = b_n(P_n - P_{n+1}) + Q_{n-1}.$$

Eingegangen 18. November 1941.

Ein elementarer Beitrag zur Fermatschen Vermutung

Von *Franz Niedermeier* in München.

Zum Beweis des am Schluß dieser Arbeit formulierten Satzes werden nur die folgenden zwei leicht beweisbaren und sehr bekannten Hilfssätze benötigt:

Hilfssatz 1. Sind a und b ungerade Zahlen und ist λ eine ungerade positive Zahl, so sind $a-b$ und $a^\lambda - b^\lambda$ durch dieselbe Potenz von 2 teilbar.

Hilfssatz 2. Sind a und b teilerfremde ganze rationale Zahlen und ist $a-b$ nicht durch die Primzahl λ teilbar, so sind auch $a-b$ und $\dfrac{a^\lambda - b^\lambda}{a-b}$ teilerfremd.

Nun sei λ eine ungerade Primzahl und sei die Gleichung

(1) $$x^{2\lambda} + y^{2\lambda} = z^{2\lambda}$$

in natürlichen Zahlen x, y, z lösbar. Erlaubterweise wollen wir x, y, z zu je zweien als teilerfremd annehmen. Man sieht sofort, daß eine der Zahlen x, y gerade sein muß. Sei daher

(2) $$y = 2^\nu y_1 \qquad (\nu \geqq 1,\ y_1 \text{ ungerade}).$$

x und z sind dann ungerade. Die Zahlen $z^\lambda + y^\lambda$ und $z^\lambda - y^\lambda$ sind teilerfremd, und da ihr Produkt gleich $x^{2\lambda}$ ist, muß jede eine (2λ)-te Potenz sein:

(3) $$z^\lambda + y^\lambda = A^{2\lambda},\ z^\lambda - y^\lambda = B^{2\lambda},$$

(4) $$x = AB \qquad (A, B \text{ ungerade}).$$

Nach (3) sind die Zahlen $A^{2\lambda} - z^\lambda$ und $z^\lambda - B^{2\lambda}$ beide gleich y^λ, also genau durch $2^{\nu\lambda}$ teilbar. Nach Hilfssatz 1 ist also auch

(5) $$A^2 - z = 2^{\nu\lambda}\varrho,\ z - B^2 = 2^{\nu\lambda}\sigma \qquad (\varrho, \sigma \text{ ungerade}).$$

Ferner ist $z^{2\lambda} - x^{2\lambda} = y^{2\lambda}$ genau durch $2^{2\nu\lambda}$ teilbar; also nach Hilfssatz 1

(6) $$z^2 - x^2 = 2^{2\nu\lambda}\tau \qquad (\tau \text{ ungerade}).$$

Nach (3) ist $A^{2\lambda} - B^{2\lambda} = 2y^\lambda$, also genau durch $2^{\nu\lambda+1}$ teilbar. Daher ist nach Hilfssatz 1 auch

$$A^2 - B^2 = 2^{\nu\lambda+1}s \qquad (s \text{ ungerade}).$$

Setzt man noch $A^2 + B^2 = 2r$, so ist auch r ungerade; und man erhält

$$A^2 = r + 2^{\nu\lambda}s,\ B^2 = r - 2^{\nu\lambda}s,$$

also durch Multiplikation wegen (4)

(7) $$x^2 = r^2 - 2^{2\nu\lambda}s^2.$$

Aus (5) und (6) folgt

$$(z - A^2)(z - B^2) + z^2 - x^2 = 2^{2\nu\lambda}(-\varrho\sigma + \tau)$$

oder nach Ausmultiplizieren, weil $A^2 + B^2 = 2r$ und $AB = x$ ist,

$$2z^2 - 2rz = 2^{2\nu\lambda}(-\varrho\sigma + \tau).$$

Da z, ϱ, σ, τ ungerade, folgt hieraus, daß $z - r$ durch $2^{2\nu\lambda}$ teilbar ist; also ist

$$z = r + 2^{2\nu\lambda} t. \tag{8}$$

Aus (8) und (7) ergibt sich nach dem binomischen Satz

$$z^{2\lambda} \equiv r^{2\lambda} + 2\lambda r^{2\lambda-1} \cdot 2^{2\nu\lambda} t \pmod{2^{4\nu\lambda}},$$
$$x^{2\lambda} \equiv r^{2\lambda} - \lambda r^{2\lambda-2} \cdot 2^{2\nu\lambda} s^2 \pmod{2^{4\nu\lambda}},$$

also durch Subtraktion und nach Division durch $2^{2\nu\lambda}$ wegen (1) und (2)

$$y_1^{2\lambda} \equiv \lambda r^{2\lambda-2}(2rt + s^2) \pmod{2^{2\nu\lambda}}.$$

Da das Quadrat einer ungeraden Zahl stets $\equiv 1 \pmod 8$ ist, ergibt sich hieraus insbesondere

$$1 \equiv \lambda(2rt + 1) \pmod 8. \tag{9}$$

Nunmehr setzen wir voraus, daß y nicht durch λ teilbar ist, während xz durch λ teilbar sein darf. Dann ist $z^2 - x^2$ als Teiler von $z^{2\lambda} - x^{2\lambda} = y^{2\lambda}$ nicht durch λ teilbar, so daß $z^2 - x^2$ und $\dfrac{z^{2\lambda} - x^{2\lambda}}{z^2 - x^2}$ nach Hilfssatz 2 teilerfremd sind. Da ihr Produkt gleich $y^{2\lambda}$ ist, muß $z^2 - x^2$ eine (2λ)-te Potenz sein, so daß wir Formel (6) vervollkommnen können zu

$$z^2 - x^2 = 2^{2\nu\lambda} d^{2\lambda} \qquad (d \text{ ungerade}).$$

Setzt man hier für z und x^2 die Werte aus (8) und (7) ein, so kommt

$$2r \cdot 2^{2\nu\lambda} t + 2^{4\nu\lambda} t^2 + 2^{2\nu\lambda} s^2 = 2^{2\nu\lambda} d^{2\lambda},$$

oder nach Division durch $2^{2\nu\lambda}$

$$2rt + s^2 \equiv d^{2\lambda} \pmod{2^{2\nu\lambda}}.$$

Daher ist insbesondere

$$2rt + 1 \equiv 1 \pmod 8. \tag{10}$$

Die Kongruenzen (9) und (10) ergeben $1 \equiv \lambda \pmod 8$, womit der folgende Satz bewiesen ist:

Satz. *Ist λ eine ungerade Primzahl und zwar $\lambda \not\equiv 1 \pmod 8$, so ist die Gleichung*

$$x^{2\lambda} + y^{2\lambda} = z^{2\lambda}$$

in natürlichen Zahlen x, y, z, von denen keine durch 2λ teilbar ist, nicht lösbar.

Nachtrag. Nach Fertigstellung der Arbeit hat mich Herr Perron darauf aufmerksam gemacht, daß der gleiche Satz bereits von Kummer, und zwar ebenfalls mit elementaren Mitteln bewiesen worden ist[1]). Da jedoch der obige Beweis von dem Kummerschen erheblich abweicht und etwas kürzer ist, dürfte seine Veröffentlichung wohl gerechtfertigt sein. Kummer braucht und beweist den Hilfssatz 2, sogar eine Verschärfung; er braucht dann aber außer den Formeln (3) noch ähnliche Darstellungen für $z \pm y$ und $z \pm x$ und muß dabei die drei Fälle unterscheiden, daß x oder z oder keine dieser Zahlen durch λ teilbar ist, während oben alles einheitlich geht. Zum Vergleich habe ich die Bezeichnung der Kummerschen angepaßt.

[1]) E. E. Kummer, De aequatione $x^{2\lambda} + y^{2\lambda} = z^{2\lambda}$ per numeros integros resolvenda, Crelles Journal 17 (1837) S. 203—209.

Eingegangen 10. November 1941.

Zur Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern.

A. Hammerstein zum Gedächtnis.

Von *Arnold Scholz* †.

Den Primzerfall in unendlichen algebraischen Zahlkörpern K hat W. Krull in zwei Abhandlungen[1]) untersucht, und zwar hat er in K. I das Verhältnis von Primideal und zugehörigen Primäridealen in K präzisiert und dadurch für den Fall, daß eine Primzahl p in K nur endlich viele Primteiler besitzt, die Form des Primzerfalls erhalten. (Die unendlichen Körper, in denen alle Ideale nur endlich viele Primteiler haben, betrachtete schon E. Stiemke[2]).) In K. II ist dann der Fall unendlich vieler Primteiler behandelt. Dazu wird dort eine auch in die Formulierung der Hauptsätze 25 und 26 (über die Faktor- und Teilereigenschaft) eingehende Topologie entwickelt, die der Krullschen Topologisierung der unendlichen Galoisgruppe[3]) zwar entspricht, aber schon dadurch etwas enträt, daß in K. II auch Nichtnormalkörper K betrachtet werden.

Hier sollen nun diese Sätze (unten als Satz IV und II/III) für unendliche Normalkörper K unmittelbar aus dem Begriff der in K. G. definierten Abgeschlossenheit in der Galoisgruppe formuliert und bewiesen werden, wodurch der Galoiszusammenhang im Satz und Beweis deutlicher wird. Hernach kann man den Primzerfall in einem nicht normalen K′ aus dem in seinem Galoiskörper durch den Dedekindschen Satz[4]) über die Primidealzerlegung in Unterkörpern gewinnen, der auf unendliche Körper übertragbar ist (Satz V). Ausgang für die Betrachtung ist der Satz (I 1.), daß auch im unendlichen Galoiskörper alle Primidealteiler einer Primzahl einander konjugiert sind. Merkwürdigerweise ist dieser Satz weder in K. I, II ausgesprochen noch bei Herbrand[5]), der nun weiter Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungsgruppen im unendlichen Zahlkörper betrachtet, in H. I für relativ endlichen, in H. II für relativ unendlichen Grad.

Vor Formulierung der Sätze I—IV führen wir die Bezeichnungen ein:

$A \frown B$ Durchschnitt der Mengen (Ideale, Körper, Gruppen) A und B,

$\wedge A$ und $\vee A$ Durchschnitt und Vereinigung der Mengen A,

$\{\ \}$ Erzeugungszeichen für Gruppen, $(\ )$ für Ideale,

$\mathfrak{AB}$ Menge der Gruppenelemente AB, wo A in $\mathfrak{A}$ und B in $\mathfrak{B}$,

[1]) W. Krull, Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. I., Math. Z. 29 (1928), 42—54; II., Math. Z. 31 (1930), 527—557, hier bezeichnet mit K. I und K. II.

[2]) E. Stiemke, Über unendliche algebraische Zahlkörper, Math. Z. 25 (1926), 9—39.

[3]) W. Krull, Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen, Math. Ann. 100 (1928), 687—698, hier bezeichnet mit K. G.

[4]) Göttinger Nachr. 1895, 272.

[5]) J. Herbrand, Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini. I., Math. Ann. 106 (1932), 473—501; II., Math. Ann. 108 (1933), 699—717, hier bezeichnet mit H. I und H. II.

und erklären noch einmal die grundlegenden Begriffe und Ergebnisse aus K. G. und K. I (Erläuterungen durch Beispiele nach den Beweisen der Sätze). Zunächst entsprechen sich bei Übergang von einem endlichen oder unendlichen Körper K zu einem Erweiterungskörper K′ mit dem Einsideal $\mathfrak{o}'$ die Ideale $\mathfrak{a}$ in K und $\mathfrak{a}\mathfrak{o}'$ in K′ wegen $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}' \cap K$ (vgl. H. I, II, Théorème 1, und näher K. I, S. 44)[6]. Ebenso ist $\mathfrak{j}\mathfrak{o}' \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{o}' = \mathfrak{j}\mathfrak{a}\mathfrak{o}'$. Es kann darum die Ausdrucksweise, daß ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus K in K′ ein Produkt oder k. g. V. (Durchschnitt) von Idealen $\mathfrak{a}'$ wird, aus dem Endlichen übernommen werden. Der Identifizierung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{o}'$ wird man dabei am besten so gerecht, daß man alle Ideale grundsätzlich in den Körper Ω aller algebraischen Zahlen projiziert und als Ideale des Unterkörpers K von Ω die Ideale $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ betrachtet, die durch Zahlen α_i aus K erzeugbar sind[7]. (Diese Ideale bilden eine Unter-Halbgruppe H der (unabzählbaren (s. u.)) Halbgruppe A aller Ideale.) Primideal in K heißt dann ein Ideal $\mathfrak{p}$, wenn die durch Zahlen aus K vertretenen Restklassen mod $\mathfrak{p}$ einen nullteilerfreien Ring bilden, d. h. hier einen Körper, weil $\mathfrak{p}$ in K teilerlos ist (K. I, Satz 3). Ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal in K bedeutet dann ein Ideal mit dem einzigen Primteiler $\mathfrak{p}$. Ist der Restklassenkörper mod $\mathfrak{p}$ in K endlich vom Grade f, also p^f die Restklassenzahl, so heißt f der absolute Grad von $\mathfrak{p}$ in K. Entsprechend für Relativgrad. Bei unendlichem Restklassenkörper gilt die Steinitzsche Begriffserweiterung (s. H. I, S. 477/78 und unten Satz VI, S. 126).

Die Galoisgruppe eines unendlichen Normalkörpers K hat immer kontinuierlich viele Elemente. Ist $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ eine Folge endlicher Normalkörper mit der Vereinigung $K = \bigvee K_n$ (der Grundkörper K_0 entweder der rationale Körper P oder irgendein endlicher Körper), $\mathfrak{G}$ die Galoisgruppe von K/K_0, S irgendein Element aus $\mathfrak{G}$, also ein Automorphismus von K, der K_0 in Ruhe läßt, so bewirkt dieser in K_n den Automorphismus $S\mathfrak{H}_n$, wo $\mathfrak{H}_n$ die K_n in Ruhe lassende Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, also $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_n$ die Galoisgruppe von K_n. Bildet man umgekehrt eine Folge $\tilde{S}_n = S_n\mathfrak{H}_n$ von Automorphismen der Körper K_n so, daß $\tilde{S}_n$ in K_{n-1} die Substitution $\tilde{S}_{n-1}$ bewirkt, daß also $S_n \equiv S_{n-1} \bmod \mathfrak{H}_{n-1}$ oder $S_n\mathfrak{H}_{n-1} = S_{n-1}\mathfrak{H}_{n-1}$, d. h. $\tilde{S}_n\mathfrak{H}_{n-1}/\mathfrak{H}_n = \tilde{S}_{n-1}$ gilt, so bewirken alle $\tilde{S}_i$ mit $i \geqq n$ in K_n denselben eindeutigen Automorphismus, und es bestimmt die ganze „Fundamentalfolge" $\tilde{S}_n$ durch Fortsetzung dieses Automorphismus über alle K_i eine eindeutige Permutation S in K, die sich als Automorphismus erweist, weil die Forderungen hierfür an Summe und Produkt bei der Zweizahl der Glieder und Faktoren schon in einem K_i erfüllt sind (vgl. K. G., Satz 3). Die Substitutionen von $\mathfrak{G}$ und die Fundamentalfolgen entsprechen sich also eineindeutig (vgl. K. G., Satz 3), und es hat $\mathfrak{G}$ die Kontinuumsmächtigkeit $\Pi r_n = \mathfrak{c}$, wobei $r_n \neq 1$ den endlichen Grad von K_n/K_{n-1} bedeutet. Die eineindeutige Beziehung ergibt $\tilde{S}_n = S\mathfrak{H}_n$ $(= S_n\mathfrak{H}_n)$, das die $\mathfrak{H}_n$-Umgebung von S heiße oder auch, wenn die Körperfolge K_n festgewählt ist, die n-te (nähere) Umgebung von S $(= \bigwedge \tilde{S}_n)$, und man faßt dann S auch als Limes der aus den $\tilde{S}_n$ ausgewählten S_n auf. Allgemein ist eine Folge R_n aus $\mathfrak{G}$ als konvergent zu betrachten, wenn $R_i \equiv R_{i-1} \bmod \mathfrak{H}_n$ für $i > i(n)$, und das einzige in allen $R_i\mathfrak{H}_n$ liegende Element S als ihr Limes. Der Limesbegriff ist damit von der Auswahl der Körperfolge K_n unabhängig, weil für eine andere Körperfolge K_n' mit $\bigvee K_n' = K$ jedes K_n' in einem K_i liegt und umgekehrt. Eine Elementemenge heißt abgeschlossen, wenn sie die Limites aller ihrer konvergenten Teilfolgen enthält. Die kleinste ein System $\mathfrak{S}$ enthaltende abgeschlossene Menge heißt die abgeschlossene

---

[6]) Alle Erörterungen über Ideale sind so formuliert, daß man entweder nur die ganzen Ideale betrachtet oder die ganzen und gebrochenen Ideale, die Quotienten zweier ganzen sind.

[7]) Man vergleiche jedoch die Diskrepanz, die hier bei unendlicher Durchschnittsbildung entstehen kann, am Beispiel (13).

Hülle $\overline{\mathfrak{S}}$ von $\mathfrak{S}$. Das Hauptergebnis von K. G. ist, daß die zu den Unterkörpern von K gehörigen Untergruppen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ die Gesamtheit der abgeschlossenen Untergruppen darstellen. Nicht abgeschlossen aber sind z. B. alle abzählbar unendlichen Gruppen, zu denen sicher die aus abzählbar unendlich vielen Elementen im Sinne der gewöhnlichen Gruppentheorie erzeugten Gruppen gehören (vgl. insbesondere Beispiel 2).

Prim- und Primärideal verhalten sich nach K. I so zueinander: Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, p die durch $\mathfrak{p}$ teilbare rationale Primzahl, und $\mathfrak{p}_n$ das durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primideal in K_n, $\mathfrak{p}_n = (\mathfrak{p} \frown K_n)$, so ist $\mathfrak{p} = V\mathfrak{p}_n$, und umgekehrt ist die Vereinigung durch einander teilbarer (ineinanderliegender) Primideale $\mathfrak{p}_n$ der K_n ein Primideal $\mathfrak{p}$ in K, weil ein Nullteiler mod $\mathfrak{p}$ schon ein solcher nach einem $\mathfrak{p}_t$ ist. (Dies gilt auch in Nichtnormalkörpern.) Es gehe $\mathfrak{p}_n$ in e_n-ter Potenz in p auf, also $e_{n-1} \mid e_n$. Entweder sind von einem n an alle e_n gleich, die Verzweigung von p ist in K nur endlich (hört von einem K_n an auf); dann sei $\operatorname{Max} e_n = e$. Oder die e_n wachsen unbeschränkt: in K ist p unendlich verzweigt. In beiden Fällen besitzt p eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente $\mathfrak{q}$, d. h. einen größten zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primäridealteiler (der durch alle anderen teilbar ist), den man als Vereinigung $\mathfrak{q} = V\mathfrak{q}_n$ der zu den $\mathfrak{p}_n$ in K_n gehörigen Primärkomponenten $\mathfrak{q}_n$ von p gewinnt, und in beiden Fällen teilt $\mathfrak{q}$ keine Idealpotenz von p mit echt gebrochenem Exponenten. Im ersten Fall wird $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^e$, und $\mathfrak{p}$ teilt $p^{\frac{1}{e}}$ (d. h. $\sqrt[e]{p}$ liegt in $\mathfrak{p}$, wenn man wie oben $\mathfrak{p}$ als Ideal in Ω auffaßt), aber keine niedere Potenz. Im zweiten Fall teilt $\mathfrak{p} = V\mathfrak{p}_n = V\mathfrak{q}_n^{1:e_n} = V\mathfrak{q}^{1:e_n}$ jede Potenz von p mit noch so kleinem positiven Exponenten, ist aber $\neq (1)$. Es ist $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{q}$ durch Potenzierung unerreichbar. Ein beliebiges $\mathfrak{p}$-Primärideal $\mathfrak{r}$ ist bestimmt (K. I, S. 48; s. auch K. II, Satz 14) durch seinen reellen Wert w, der angibt, daß $\mathfrak{r}$ noch jede Potenz p^r mit rationalem $r > w$ teilt, aber nicht teilt für $r < w$, und den Zusatz „endlich" oder „unendlich", je nachdem p^w selbst ein Vielfaches von $\mathfrak{r}$ ist oder nicht. (Das endliche Ideal besitzt im $\mathfrak{p}$-Punktring eine endliche Erzeugung und auch in K, falls p dort nur endlich viele Primteiler hat.) Dabei existiert in K das endliche Primärideal vom Wert w nur, wenn w rational und p^w Ideal in K ist, also der Nenner von w in einem e_n aufgeht, dagegen das unendliche von jedem reellen Wert w, wenn nur p unendlich verzweigt ist. Es wird $\mathfrak{q}$ das endliche Primärideal vom Wert 1, $\mathfrak{p}$ das unendliche vom Wert 0. Das Ideal $\mathfrak{q}^w$ existiert für rationales w immer in Ω, braucht aber nicht in K zu liegen.

Wir vereinfachen noch die Ausdrucksweise und schreiben $\mathfrak{q}^w$ für das endliche und $\mathfrak{q}^{w+} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}^w$ für das unendliche Primärideal vom Wert w (insbesondere $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^{0+}$). Die Gesamtheit der „hyperreellen" Exponenten $v = w$ oder w^+ entspricht im Sinne der Teilbarkeit der $\mathfrak{q}^v$ der Gesamtheit der Dedekindschen Schnitte der rationalen Zahlen bei Nichtidentifizierung der Fälle „Oberklasse mit kleinstem" und „Unterklasse mit größtem Element". Hat die Oberklasse ein kleinstes Element, so liegt der Fall w vor, sonst der Fall w^+. Die natürliche Einordnung der w^+ ist durch

$$w < w^+ < w' \text{ für } w' > w \tag{1}$$

gegeben und die Addition durch

$$w^+ + w' = w^+ + w'^+ = (w + w')^+ \tag{2}$$

zu ergänzen. Dann stimmen wieder die Regeln

$$\mathfrak{q}^v \mid \mathfrak{q}^{v'} \text{ für } v \leqq v' \text{ und } \mathfrak{q}^v \cdot \mathfrak{q}^{v'} = \mathfrak{q}^{v+v'} \quad (v = w \text{ oder } w^+) \tag{3}$$

(siehe weiter Satz IV). Für irrationales w ließe sich abgekürzt $\mathfrak{q}^w$ schreiben; doch ist bei Multiplikation von $\mathfrak{q}^w$ darauf zu achten, daß jedenfalls das Produkt ein unendliches Ideal ist. Die Umgebungen der nachher als Funktionen von Gruppenelementen S auftretenden v sind als Intervalle so zu definieren, daß ein $v = w$ am oberen Rand seiner

Umgebungen liegt, ein $v = w^+$ aber am unteren Rand oder im Innern seiner Umgebungen, je nachdem $\mathfrak{q}^w$ existiert oder nicht (Sprung zwischen w und w^+ !). Eine absteigende beschränkte Folge hat einen Limes w^+, eine aufsteigende einen Limes w, falls w Exponent ist, sonst w^+. Für lim sup $v_n = w$ (nicht w^+) ist von einem n an $v_n \leqq w$ (siehe unten den Beweis von III. 2).

Für die Konjugierten $\mathfrak{q}^S$ von $\mathfrak{q}$ brauchen wir eine Normierung: Ist $\mathfrak{Z}$ die Invarianzgruppe (Zerlegungsgruppe) von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, so legen wir wegen $\mathfrak{q}^{ZS} = \mathfrak{q}^S$ für Z in $\mathfrak{Z}$ zur Vermeidung von Doppeldarstellungen für den Exponenten S ein festes rechtsseitiges Rechtssystem mod $\mathfrak{Z}$ zugrunde. Für ein beliebiges Element ZS aus $\mathfrak{G}$ setzen wir aber durchweg $v_{ZS} = v_S$ in den nachher auftretenden Exponentenfunktionen.

Es sei auch gleich darauf hingewiesen, daß Zerlegungs- und Trägheitsgruppe und -körper durch Grenzübergang aus denen der Körper K_n mit all ihren Haupteigenschaften hervorgehen[8]): Ist $\mathfrak{Z}_n$ die $\mathfrak{p}_n$ invariant lassende Untergruppe von $\mathfrak{G}$, also $\mathfrak{Z}_n/\mathfrak{H}_n$ die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}_n$ in K_n, so läßt $\Lambda\mathfrak{Z}_n$ das Ideal $\mathsf{V}\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ invariant, ein S außerhalb $\Lambda\mathfrak{Z}_n$ aber nicht, weil ein solches S auch außerhalb eines $\mathfrak{Z}_i$ liegt und dann $(\mathfrak{p}_i^S, \mathfrak{p}_i)$ und $(\mathfrak{p}^S, \mathfrak{p}) = 1$. Also ist $\Lambda\mathfrak{Z}_n = \mathfrak{Z}$ und damit $\mathfrak{Z}$ abgeschlossen. $\mathfrak{G}$ zerfällt dann mod $\mathfrak{Z}$ entweder in endlich oder kontinuierlich viele Restklassen mod $\mathfrak{Z}$, und genau so viele Primteiler hat p. Ist Z_n der zu $\mathfrak{Z}_n$ gehörige Unterkörper, in dem $\mathfrak{q}_n$ liegt und den Grad 1 hat, so ist der zu $\mathfrak{Z}$ gehörige Unterkörper $\mathsf{Z} = \mathsf{V}\mathsf{Z}_n$ als Zerlegungskörper von $\mathfrak{q}$ dadurch gekennzeichnet, daß $\mathfrak{q}$ in ihm Primideal ersten Grades ist (Vorwegnahme von Satz I. 3); denn liegt α in Z, so etwa in Z_i, es gilt eine Kongruenz $\alpha \equiv r \bmod \mathfrak{q}_i$, r rational, und dann auch $\alpha \equiv r \bmod \mathfrak{q}$. Ist aber Θ irgendein Körper, in dem $\mathfrak{q}$ Primideal ersten Grades ist, so ist $(\mathfrak{q} \cap \mathsf{K}_n) = \mathfrak{q}_n$ Primideal in $\Theta_n = \Theta \cap \mathsf{K}_n$, und aus $\alpha \equiv r(\mathfrak{q})$ in Θ und etwa α in Θ_i folgt $\alpha \equiv r(\mathfrak{q}_i)$. Also $\Theta_i = \mathsf{Z}_i$ für großes i und $\Theta = \mathsf{Z}$.

Ebenso ist der Restklassenkörper Φ mod $\mathfrak{p}$ in K isomorph der Vereinigung $\mathsf{V}\Phi_n$, wo Φ_n der Körper der Charakteristik p vom Grade f_n und $f_n = 0(f_{n-1})$ der Grad von $\mathfrak{p}_n$ in K_n ist, dessen Restklassenkörper also mit Φ_n isomorph ist (vgl. H. I, S. 478 und H. II, S. 704, Théorème 6, in dessen Beweis dies als selbstverständlich angenommen wurde): Liegt die Zahl α aus K etwa in K_i, so ist entweder $\alpha \equiv 0(\mathfrak{p}_i)$ oder seine $(p^{f_i} - 1)$-te Potenz $\equiv 1\ (\mathfrak{p}_i)$, also $\equiv 1(\mathfrak{p})$, d. h. jeder Rest hat einen in einem f_i aufgehenden Grad, und Φ ist einem Teil von $\mathsf{V}\Phi_n$ isomorph . Umgekehrt liefert für jedes n eine Primitivwurzel φ mod $\mathfrak{p}_n$ in K_n einen Rest (vom Grade f_n), der auch mod $\mathfrak{p}$ den Exponenten $p^{f_n} - 1$ hat, weil mit $\varphi^a \equiv 1(\mathfrak{p})$ auch $\varphi^a \equiv 1(\mathfrak{p}_n)$ gilt. Also $\Phi \sim \mathsf{V}\Phi_n$. (Gilt auch, wenn K kein Normalkörper ist.)

Ist T_n der Trägheitskörper von $\mathfrak{p}_n$ und $\mathsf{V}\mathsf{T}_n = \mathsf{T}$, sind $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}$ die zu T_n und T gehörigen Untergruppen von K, so gilt nach Definitionseigenschaft der Trägheitsgruppe $\alpha^T \equiv \alpha \bmod \mathfrak{p}_n$ für alle α aus K_n genau dann, wenn T in $\mathfrak{T}_n$ liegt. Also $\alpha^T \equiv \alpha(\mathfrak{p})$ für alle α aus K, wenn T in $\mathfrak{T} = \Lambda\mathfrak{T}_n$; was $\mathfrak{T}$ als Trägheitsgruppe von $\mathfrak{p}$ definiert. Die charakteristische Eigenschaft des Trägheitskörpers, daß $\mathfrak{p}_n$ in T_n noch unverzweigt $(\mathfrak{q}_n \cap \mathsf{T}_n = \mathfrak{p}_n \cap \mathsf{T}_n)$ von da ab aber, von T_n nach K_n, voll verzweigt ist, überträgt sich auf T in dem Sinne, daß T auch der größte Unterkörper von K ist, in dem $\mathfrak{p}$ noch unverzweigt ist, daß jede endliche Erweiterung von T innerhalb K voll verzweigt und damit jede unendliche Erweiterung unendlich verzweigt ist. Beweis: In T_n ist $\mathfrak{q}_n$ noch Primideal (f_n-ten Grades) und darum auch $\mathfrak{q}$ in T Primideal und $\mathfrak{p}$ noch unverzweigt. Ist aber μ eine Zahl aus K vom Grade e über T, so auch vom Grade e über einem T_i, in dem die Koeffizienten der Gleichung für μ liegen. Primideal in $\mathsf{T}_i(\mu)$ ist $\mathfrak{q}_i^{1:e}$, in $\mathsf{T}(\mu)$ also das Ideal $(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_i^{1:e})$; dies ist gleich $\mathfrak{q}^{1:e}$, weil seine e-te Potenz $(\mathfrak{q}^e, \mathfrak{q}_i) = \mathfrak{q}$. Wenn aber $\mathfrak{p}$ in einem Körper Y zwischen T und K schon unendlich verzweigt ist, ist $\mathfrak{p}$ selbst das Primideal von Y und keiner eigentlichen Verzweigung mehr fähig (vgl. hier [8]) und davor; ferner Satz V/VI.)

Wir formulieren nun

Satz I. 1. *Auch in den unendlichen Normalkörpern sind die Primidealteiler einer Primzahl p einander konjugiert.* **2.** *Dasselbe gilt von den Primärkomponenten von p.* **3.** *Diese liegen in den Zerlegungskörpern ihrer Primteiler, sind dort Primideale ersten Grades und haben den Wert* 1.

Satz II. 1. *Die Primzahl p ist das k. g. V. aller Konjugierten $\mathfrak{q}^S$ einer Primärkomponente $\mathfrak{q}$.* **2.** *Damit $p = \Lambda\mathfrak{q}^S$ schon für einen Teil der Konjugierten, etwa die $\mathfrak{q}^S$ mit*

[8]) Vgl. auch M. Deuring, Verzweigungstheorie bewerteter Körper, Math. Ann. 105 (1931), 277—307.

aus $\mathfrak{S}$, gilt, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{G}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}$ ist, wo $\mathfrak{Z}$ die Zerlegungsgruppe eines Primteilers von $\mathfrak{q}$. 3. Allgemeiner sind die einzigen Primärteiler eines Durchschnitts $\Lambda\mathfrak{q}^S$ die $\mathfrak{q}^L$, für die L in der abgeschlossenen Hülle der $\mathfrak{Z}S$ liegt.

Satz III. 1. *Ist $(\mathfrak{q}^S)^{\bar v_S}$ die genaue im Ideal $\mathfrak{j}$ aufgehende Potenz von $\mathfrak{q}^S$, so bilden die Substitutionen S, für die $\bar v_S > v$ ist, eine abgeschlossene Menge. 2. Es ist $\bar v_S$ eine in $\mathfrak{G}$ nach oben halbstetige Funktion von S. 3. Ist insbesondere $\mathfrak{j} = \Lambda(\mathfrak{q}^S)^{v_S}$ als Potenz-k. g. V. der $\mathfrak{q}^S$ gegeben, so ist für dieses $\mathfrak{j}$*

$$\bar v_S = \operatorname{Max}\left(v_S,\ \limsup_{H\to S} v_{SH}\right) \tag{4}$$

und dann $\mathfrak{j} = \Lambda(\mathfrak{q}^S)^{\bar v_S}$ die vollständige Darstellung von $\mathfrak{j}$ durch alle seine Primärkomponenten. 4. Die vollständige Primärdarstellung eines beliebig ganzen $\mathfrak{j} = \Pi\Lambda(\mathfrak{q}_i^S)^{\bar v_{iS}}$ entspringt dann aus der Zerlegung $\mathfrak{j} = \Pi(\mathfrak{j}, m_i)$, wo $m = \Pi m_i$ die Primärzerlegung eines in $\mathfrak{j}$ liegenden rationalen m ist. 5. Umgekehrt liefert jede beschränkte nach oben halbstetige Funktion $\bar v_S$, die nur vom rechtsseitigen Rest $S \bmod \mathfrak{Z}$ abhängt, ein von Null verschiedenes Ideal $\mathfrak{j} = \Lambda(\mathfrak{q}^S)^{\bar v_S}$ in vollständiger Primärdarstellung.

III. 6. *Die Aussage (4) bedeutet bei Zergliederung nach Wert und Endlichkeitsverhalten der Ideale, wenn wir bei rationalem Wert überall $\mathfrak{q}^v = \mathfrak{p}^{\varepsilon}\mathfrak{q}^w$ $(\varepsilon = 0, 1)$ entsprechend ersetzen: Es ist auch $\bar w_S = \operatorname{Max}(w_S, \bar w_S)$, wo $\bar w_S = \lim w_{SH}$. Bei rationalem, als Exponent von $\mathfrak{q}$ vorkommendem $\bar w_S$ ist die $\mathfrak{q}^S$-Komponente unter folgenden genauen Bedingungen endlich (also $\bar\varepsilon_S = 0$): a) für $w_S > \bar w_S$, also $\bar w_S = w_S$, wenn $\varepsilon_S = 0$; b) für $w_S < \bar w_S$, also $\bar w_S = \bar w_S$, wenn in einer Umgebung von S entweder $w < \bar w_S$, oder $w = \bar w_S$ und dabei $\varepsilon = 0$; c) für $w_S = \bar w_S$ wenn die Bedingungen von a) und b) erfüllt sind.*

Satz IV. 1. *Es ist bei vollständiger Primärdarstellung von $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{j}'$*

$$\mathfrak{j}\mathfrak{j}' = \Pi\Lambda(\mathfrak{q}^S)^{\bar v_{iS}}\,\Pi\Lambda(\mathfrak{q}^S)^{\bar v'_{iS}} = \Pi\Lambda\mathfrak{q}^{S(\bar v_{iS}+\bar v'_{iS})}. \tag{5}$$

2. Es ist in den obigen Bezeichnungen $\mathfrak{j}$ Faktor von $\mathfrak{j}'$ genau dann ($\mathfrak{j}' = \mathfrak{j}\mathfrak{k}$ darstellbar), wenn die Gleichungen $\bar v_{iS} + x_{iS} = \bar v'_{iS}$ für jedes i wenigstens eine nach oben halbstetige Lösung haben. 3. Dagegen ist $\mathfrak{j}$ schon dann Teiler von $\mathfrak{j}'$, wenn durchweg $\bar v_{iS} \leqq \bar v'_{iS}$.

(Sind die $\mathfrak{q}_i^S$-Komponenten von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$ beide unendlich, so gibt es zwei Lösungen x_{iS} gleichen Wertes während bei endlicher $\mathfrak{j}'$- und unendlicher $\mathfrak{j}$-Komponente $\mathfrak{j}$ kein Faktor von $\mathfrak{j}'$ sein kann. Hat $\mathfrak{j}'$ aber durchweg unendliche Komponenten, so ist $\mathfrak{j}$ Faktor bei Oberhalbstetigkeit der Wertdifferenzen $\bar w'_{iS} - \bar w_{iS}$. Soll $\mathfrak{p}$ Faktor von $\mathfrak{p}$ sein, muß sowohl Zerlegungskörper wie Trägheitsgruppe endlich sein.)

Bemerkung. Die obigen Sätze bleiben richtig, wenn sie auf irgendeinen endlichen Grundkörper K_0 bezogen werden. Dann ist nur p als ein Primideal in K_0 aufzufassen, und die Werte ver-e-fachen sich, wenn e der Exponent von p (genau p^e in $p \frown \mathfrak{P}$ aufgeht). Die Konjugiertheit wird ein engerer Begriff, die weitesten Umgebungen fallen fort, der Limesbegriff bleibt derselbe.

Beweis von I. 1. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primteiler von p in K und $\mathfrak{r}$ ein zweiter. Dann ist das durch $\mathfrak{r}$ teilbare Primideal $\mathfrak{r}_n$ in K_n zu $\mathfrak{p}_n$ (Bezeichnungen wie oben) konjugiert, weil I. 1 für endliche Körper gilt. Also etwa $\mathfrak{r}_n = \mathfrak{p}_n^{R_n}$, wo R_n ein Element aus $\mathfrak{G}$. Ist nun speziell $J_1, \ldots, J_m$ ein Vertretersystem aus $\mathfrak{G}$ für die Galoisgruppe $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i$ von $\mathsf{K}_i/\mathsf{K}_{i-1}$, also $\mathfrak{H}_{i-1} = J_1\mathfrak{H}_i + \cdots + J_m\mathfrak{H}_i$, so muß unter den Primteilern $\mathfrak{p}_i^{R_{i-1}J_1}, \ldots, \mathfrak{p}_i^{R_{i-1}J_m}$ von $\mathfrak{r}_{i-1} = \mathfrak{p}_{i-1}^{R_{i-1}}$ (die nur dann alle verschieden sind, wenn $\mathfrak{r}_{i-1}$ in K_i voll zerfällt) auch $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{p}_i^{R_i}$ vorkommen. Also muß R_i einem der $R_{i-1}J$ rechtskongruent mod $\mathfrak{Z}_i$ sein, und man darf es dann durch dieses ersetzen. Geschieht das nacheinander für alle R_n, so gilt dann allgemein $R_n \equiv R_{n-1} \bmod \mathfrak{H}_{n-1}$, d. h. die R_n konvergieren gegen eine Substitution R, und es wird $\mathfrak{r} = \mathfrak{p}^R$.

Beweis von I. 2. Gehen wir von der Definition $\mathfrak{q} = \mathsf{V}\mathfrak{q}_n$ aus, und ist $\mathfrak{r}$ irgendein durch $\mathfrak{p}$ teilbarer Primärteiler von p, so auch $\mathfrak{r}_n = \mathfrak{r} \frown \mathsf{K}_n$, und es ist $\mathfrak{r}_n \mid \mathfrak{q}_n$, weil $\mathfrak{q}_n$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente von p in K_n. Somit auch $\mathfrak{r} = \mathsf{V}\mathfrak{r}_n \mid \mathsf{V}\mathfrak{q}_n$. Hiermit ist noch einmal gezeigt, daß $\mathfrak{q}$ wirklich die Eigenschaft der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärkomponente hat. Ebenso ist $\mathfrak{q}^S$ die zu $\mathfrak{p}^S$ gehörige, und es gibt keine weiteren.

I. 3 ist oben bewiesen, und der Wert 1 von $\mathfrak{q}$ geht aus seiner Unverzweigtheit hervor.

Beweis von II. 1. Folgt aus I. 2 nach K. I, Satz 5 oder so: Es ist $\Lambda\mathfrak{q}^S \cap \mathsf{K}_n = \Lambda\mathfrak{q}_n^S = p$, weil p in K_n das Produkt der verschiedenen $\mathfrak{q}_n^S$ ist. Somit ist auch $\Lambda\mathfrak{q}^S = \mathsf{V}\Lambda\mathfrak{q}_n^S = p$.

Beweis von II. 2 durch II. 3. Aus $\mathfrak{q}^L \mid \Lambda\mathfrak{q}^S$ folgt $\mathfrak{q}^L \mid \Lambda\mathfrak{q}_n^S$, was ein Produkt endlich vieler (teilerfremder) $\mathfrak{q}_n^S$ in K_n ist; also gilt $\mathfrak{q}^L \mid \mathfrak{q}_n^{S_n}$ für ein S_n der S und damit $\mathfrak{q}_n^L = \mathfrak{q}_n^{S_n}$, d. h. $\mathfrak{Z}_n L = \mathfrak{Z}_n S_n$ oder $\mathfrak{Z}L = \mathfrak{Z}S_n \bmod \mathfrak{H}_n$, somit $\mathfrak{Z}L = \lim \mathfrak{Z}S_n$. Umgekehrt folgt hieraus wörtlich rückwärts $\mathfrak{q}^L \mid \Lambda\mathfrak{q}_n^S$ und daraus $\mathfrak{q}^L \mid \mathsf{V}\Lambda\mathfrak{q}_n^S = \Lambda\mathfrak{q}^S$. (Bei endlichem Zerlegungskörper mit $\mathfrak{Z}_n = \mathfrak{Z}$ trivial.)

Beweis von III. Behauptung 1 läßt sich auch so formulieren: Ist $L = S_n \bmod \mathfrak{H}_n$, so ist $\mathfrak{q}^{Le}$ Teiler von $\Lambda(\mathfrak{q}^{S_n})^v$. Dies folgert man entweder wie oben für $v = 1$ aus $\mathfrak{q}_n^L = \mathfrak{q}_n^{S_n}$, durch Erhebung dieser Gleichung in die Potenz mit kleinstem in K_n zulässigem Exponenten $\geqq v$. Oder man schließt von $v = 1$ auf beliebiges v, indem man beachtet, daß eine Teilerrelation bei Potenzieren, Radizieren und Limitieren erhalten bleibt.

2. Die Oberhalbstetigkeit von $\bar{v}_S$ folgt dann unmittelbar und zwar für $v = w$, also endliche q^S-Komponente, sogar in dem scharfen Sinne, daß $\bar{v}_{SH} \leqq \bar{v}_S$ in einer ganzen H-Umgebung von S; denn gäbe es für ein $v > \bar{v}_S$ in jeder Umgebung von S noch ein $\bar{v}_{SH} \geqq v$, so ginge $(\mathfrak{q}^S)^v$ noch in $\mathfrak{j}$ auf. Der Übergang von w zu w^+ bedeutet hier also einen Sprung (siehe oben).

3. Ein k. g. V. von Idealen $(\mathfrak{q}^S)^{v_S}$ ist durch $\mathfrak{q}^S$ nicht nur in v_S-ter, sondern auch in $\tilde{v}_S$-ter Potenz teilbar, wo $\tilde{v}_S = \overline{\lim}\, v_{SH}$: Das Ideal $\mathfrak{j}_n = \mathfrak{j} \cap \mathsf{K}_n$ stellt sich, wenn e_n der Exponent von p in K_n ist, in der Form

$$(6)\quad \mathfrak{j}_n = \mathfrak{j} \cap \mathsf{K}_n = \Lambda(\mathfrak{q}_n^S)^{w_{S,n}} \text{ mit ganzem } e_n\, w_{S,n} \text{ und } v_S \leqq w_{S,n} < v_S + \frac{1}{e_n}$$

$\left(\text{für } v_S = w_S^+ \text{ heißt das } w_S < w_{S,n} \leqq w_S + \frac{1}{e_n}\right)$ dar und ist durch $\mathfrak{q}_n^S$ in genau w_n-ter Potenz teilbar, wo $w_n = \operatorname{Max} w_{SH,n}$ für H in $\mathfrak{H}_n$; denn es ist $\mathfrak{q}_n^R = \mathfrak{q}_n^S$ gerade für die $R = ZSH$, weil $\mathfrak{q}^z = \mathfrak{q}$ und K_n bei H in Ruhe bleibt. (Es sei wieder $w_{S,n}$ für alle S als nur von $S \bmod \mathfrak{Z}$ abhängig definiert.) Entweder sind dann von einem n an alle w_n einander gleich ($= w$) und dann $\bar{v}_S = w$, weil $\mathfrak{j} = \mathsf{V}\mathfrak{j}_n$, oder die w_n nehmen ständig ab, gehen gegen einen Zahlwert w, und dann ist $\bar{v}_S = w^+$. Der erste Fall tritt bei nur endlichem Potenzzerfall von p immer ein. In jedem Falle sind für H in $\mathfrak{H}_n$ alle $v_{SH} \leqq w_n$ und damit $\tilde{v}_S \leqq \lim w_n = \bar{v}_S$ (oben $= w$ oder w^+). Aber es ist auch wenigstens ein $v_{SH} > w_n - \frac{1}{e_n}$ und damit auch $\operatorname{Max}(v_S, \tilde{v}_S) \geqq \lim w_n = \bar{v}_S$, weil $e_n \to \infty$ bei unendlichem Potenzzerfall von p, und bei endlichem Zerfall $\operatorname{Max} v_{SH} = w$ ($= \lim w_n$). Beide Ungleichungen für $\bar{v}_S$ ergeben $\bar{v}_S = \operatorname{Max}(v_S, \tilde{v}_S)$, wie in III. 3 behauptet. Behauptung 4 ist klar.

5. Für $\bar{v} < a$ ist $\mathfrak{j} \mid p^a$ (bei Gebrauch von gebrochenen Idealen für $\bar{v} > -a$ auch $p^{-a} \mid \mathfrak{j}$), und die Oberhalbstetigkeit zusammen mit der nur $\mathfrak{Z}S$-Abhängigkeit ergibt $\lim \bar{v}_{SSH} \leqq \bar{v}_S$. (Natürlich dürfen nur in K zulässige Funktionswerte $\bar{v}$ angesetzt werden.)

Bei **III. 6** als Zergliederung von III. 3 verweisen wir auf die unten unter C angeführten Idealbeispiele.

Beweis von IV. (Multiplikationsregel). Sind $\mathfrak{q}^v$ und $\mathfrak{q}^{v'}$ die genauen in $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$ aufgehenden Potenzen von $\mathfrak{q}$ und dabei $v = w$ und $v' = w'$, enthalten also $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$ zwei genau durch $\mathfrak{q}^w$ und $\mathfrak{q}^{w'}$ teilbare Zahlen α und β, so liegt das genau durch $\mathfrak{q}^{w+w'}$ teilbare $\alpha\beta$ in $\mathfrak{j}\mathfrak{j}'$, und alle Zahlen aus $\mathfrak{j}\mathfrak{j}'$ sind durch $\mathfrak{q}^{w+w'}$ teilbar, weil die aus $\mathfrak{j}$ durch $\mathfrak{q}^w$ und die aus $\mathfrak{j}'$ durch $\mathfrak{q}^{w'}$. Also ist $\mathfrak{q}^{w+w'} = \mathfrak{q}^{v+v'}$ die genaue in $\mathfrak{j}\mathfrak{j}'$ aufgehende Potenz von $\mathfrak{q}$. Ist aber $v = w^+$, also $\mathfrak{j}$ ohne α, so liegt in $\mathfrak{j}\mathfrak{j}'$ keine genau durch $\mathfrak{q}^{w+w'}$ teilbare Zahl, aber Zahlen von jedem höheren Wert bezüglich $\mathfrak{q}$. Also ist $\mathfrak{q}^{(w+w')+} = \mathfrak{q}^{v+v'}$ wieder die genaue $\mathfrak{q}$-Potenz von $\mathfrak{j}\mathfrak{j}'$.

Die weiteren Aussagen von Satz IV sind evident und damit alles bewiesen.

Zur Erläuterung der Sätze I—IV und der Gestalt der Galoisgruppe bringen wir einige Beispiele.

A. Es sei K der Körper der 3^∞-ten Einheitswurzeln, d. h. die Vereinigung $\mathsf{K} = \mathsf{V}\,\mathsf{K}_n$, wo K_n der Körper der 3^n-ten Einheitswurzeln und $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ist Q der Automorphismus von K, der jede Einheitswurzel in ihr Quadrat überführt, so bewirken, weil 2 Primitivrest mod 3^n von der Ordnung $\varphi = 2 \cdot 3^{n-1}$ ist, die Potenzen $E, Q, \ldots, Q^{\varphi-1}$ die verschiedenen Substitutionen von K_n, während Q^φ in K_n die Identität ergibt, wie $Q^{3\varphi}$ in K_{n+1} usf. Trotzdem ist die aus Q erzeugte Gruppe $\{Q\}$ noch nicht die ganze Galoisgruppe von K, wozu nach dem Vorbild der endlichen Körper die Annahme verleiten könnte, daß im wesentlichen $\{Q\}/\{Q^\varphi\}, \{Q\}/\{Q^{3\varphi}\}, \ldots$ die Galoisgruppen von $\mathsf{K}_n, \mathsf{K}_{n+1}, \ldots$ darstellen und Q nur P in Ruhe läßt. Es ist z. B. die Substitution T, die jede Einheitswurzel in ihr Reziprokes überführt, keine Potenz von Q, wohl aber der Limes der Potenzen $Q, Q^3, Q^9, \ldots, Q^{3^n}, \ldots$, die alle in K_1, von Q^3 ab in K_2, von Q^9 ab in K_3 usf. die Substitution T bewirken.

Deutlicher tritt hier der oben erläuterte Umgebungsbegriff hervor, wenn man K direkt in $\mathsf{K}_1 = \mathsf{P}(\sqrt{-3})$ und den reellen Unterkörper Λ von K zerlegt. Jenen permutiert $T = (\zeta \to \zeta^{-1})$ und läßt $V = Q^2 = (\zeta \to \zeta^4)$ in Ruhe; diesen permutiert V und läßt T in Ruhe. Von K_1 ausgehend sind $V^3, V^9, V^{27}, \ldots$ die kleinsten V-Potenzen, die $\mathsf{K}_2, \mathsf{K}_3, \mathsf{K}_4, \ldots$ in Ruhe lassen, also in deren Untergruppen $\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \mathfrak{H}_4, \ldots$ liegen. Demnach zerlegt sich $\mathfrak{H}_n = (E + V^{3^{n-1}} + V^{2 \cdot 3^{n-1}})\mathfrak{H}_{n+1}$. Den Limes (Durchschnitt) der Fundamentalfolge

$$V^{a_0}\, V^{3a_1}\, V^{9a_2} \ldots V^{3^n a_n}\, \mathfrak{H}_{n+2} \quad (a_i = 0, \pm 1) \tag{7}$$

bezeichnet man dann sinngemäß mit $V^{a_0 + 3a_1 + 9a_2 + \ldots}$, durch eine Potenz von V mit triadischem Exponenten (vgl. in K. G., § 4, für die unendlichen zyklischen Körper die Gruppenbasis aus Erzeugenden mit p-adischen Exponenten). Es wird jetzt $\mathfrak{G} = \{T\} \cdot \overline{\{V\}}$, wo $\overline{\{V\}}$ die abgeschlossene Hülle von $\{V\}$ ist, d. h. die alle Limites der gewöhnlichen Potenzen von V einbegreifende Erweiterung von $\{V\}$. Z. B. wird $Q = T V^{\sum_{i \geq 0} -3^i}$ $(= T V^{\frac{1}{2}})$. Nach K. G., § 4 heißt eine Gruppe $\overline{\{C\}}$ „idealzyklisch".

Die Idealtheorie von K ist hier noch einfach: Alle Zerlegungskörper sind endlich, weil eine Primzahl, die $\equiv \pm 1\ (3^i)$, aber $\not\equiv \pm 1\ (3^{i+1})$, zwar in $\Lambda \cap \mathsf{K}_i$, aber in keinem Oberkörper von K_i mehr voll zerfällt. Die einzige von Eins verschiedene Trägheitsgruppe ist die des Primteilers $\mathfrak{p}$ von 3, die $= \mathfrak{G}$ ist. Es ist daher 3 selbst das zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal vom Wert 1. Alle andern p haben endlichen Primidealzerfall.

B. Es sei K das Produkt aller quadratischen Körper, in direkter Darstellung

$$\mathsf{K} = \mathsf{P}(\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{-3}, \sqrt{5}, \sqrt{-7}, \ldots, \sqrt{p_n}, \ldots) = \Pi\mathsf{P}(\sqrt{p_n}), \tag{8}$$

wo p_n die n-te Primzahl, so mit Vorzeichen versehen, daß $p_n \equiv 1 \bmod 4$ von $p_2 = -3$ an und $p_0 = -1$ sei. Die zu K aufsteigende Normalkörperfolge werde durch die Körper

$$\mathsf{K}_n = \prod_{i<n} \mathsf{P}(\sqrt{p_i}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

gebildet. Es sei S_i die Substitution von K, die $\sqrt{p_i}$ in $-\sqrt{p_i}$ überführt, alle anderen $\sqrt{p_n}$ aber ungeändert läßt. Dann ist die zu K_n gehörige Untergruppe $\mathfrak{H}_n$ von $\mathfrak{G}$ die abgeschlossene Hülle der aus allen S_k mit $k \geqq n$ erzeugten Gruppe. Insbesondere entsteht $\mathfrak{G}$ durch Abschließung der aus allen S_i $(i \geqq 0)$ erzeugten Gruppe, und jedes Element von $\mathfrak{G}$ erhält eine eindeutige Darstellung als unendliches Produkt

$$S = \prod_{i=0}^{\infty} S_i^{e_i} = \lim_{n \to \infty} \prod_{i<n} S_i^{e_i} \quad (e_i = 0, 1). \tag{10}$$

Also $\mathfrak{G} = \Pi\{S_i\} = \overline{\mathfrak{F}}$ mit $\mathfrak{F} = \{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$. $\mathfrak{G}$ ist als direktes Produkt unendlich vieler endlicher Gruppen von Kontinuumsmächtigkeit, $\mathfrak{F}$ als die Untergruppe der endlichen S_i-Produkte abzählbar. Die Folge der Basiselemente $S_0, S_1, S_2, \ldots$ ist konvergent und hat den Limes E, weil $S_n = E \bmod \mathfrak{H}_n$. Ebenso hat dann $S_0S_1, S_0S_2, \ldots, S_0S_n, \ldots$ den Limes S_0, und daher ergibt die aus den S_0S_i erzeugte Gruppe abgeschlossen die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$, im Gegensatz zu $S_1, S_2, \ldots$ (Es ist nämlich $S_0, S_0S_1, \ldots, S_0S_i, \ldots$ keine zulässige Basistransformation der S_i; denn das unendliche Produkt $S = S_0S_1S_2 \ldots$ ist durch die S_0S_i nicht als unendliches Produkt darstellbar. Wohl aber ist $S, S_1, S_2, \ldots$ mit obigem S eine Basis.)

Die Idealtheorie von K ist hier schon komplizierter. Zwar sind alle Trägheitsgruppen endlich: es ist $\{S_0, S_1\}$ die (der Primteiler) von $p_1 = 2$ und S_n für $n > 1$ die von p_n. Für $p_1 = 2$ wird also das zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^4$, für ungerades p aber $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^2$. Dagegen sind alle Zerlegungskörper unendlich, sogar die Zerlegungsgruppen endlich: von der Ordnung 8 für $p_1 = 2$ und 4 für ungerades p. Z. B. ist

$$(11) \qquad Z = P(\sqrt{-3\cdot 5}, \sqrt{-7}, \sqrt{-3\cdot 11}, \sqrt{-3\cdot 13}, \sqrt{17}, \ldots) = \prod_{i>2} P(\sqrt{p_2^{e_i} p_i})$$

mit $e_i = 0$ für $p_i \equiv 1\ (8)$ und $e_i = 1$ für $p_i \equiv 5\ (8)$ der Zerlegungskörper von 2 und $\{S_0, S_1, Z\}$ ihre Zerlegungsgruppe, wo $Z = S_2S_3S_5S_6S_8 \cdots$ das unendliche Produkt der S_i, für die $p_i \equiv 5\ (8)$.

Zur Bestimmung der Primärideale $\mathfrak{q}$ verwendet man hier vorteilhaft die oben für $p_1 = 2$ angegebene direkte Zerlegung von Z und erhält z. B.

$$\left(2, \frac{1+\sqrt{-15}}{2}, \frac{1+\sqrt{-7}}{2}, \ldots, \frac{1+\sqrt{17}}{2}, \ldots\right)$$

als Primärteiler von 2 in K, ebenso

$$\mathfrak{q} = (3, 1+\sqrt{-2}, 1+\sqrt{-5}, 1+\sqrt{7}, \ldots, 1+\sqrt{\pm p_n}, \ldots),$$

wobei das Vorzeichen von p_n durch $\pm p_n \equiv 1\ (3)$ bestimmt sei, als Primärteiler von 3 in K, weil $(3, 1+\sqrt{-2}, , \ldots, 1+\sqrt{\pm p_n})$ der Primärteiler (das Quadrat des Primteilers) von 3 in K_n ist. Bei Ersetzung von $1+\sqrt{\pm p_i}$ durch $1-\sqrt{\pm p_i}$ (nur für den Index i) in der unendlichen Idealbasis von $\mathfrak{q}$ entsteht $\mathfrak{q}^{S_i}$. Es ist 3 das k. g. V. aller Konjugierten $\mathfrak{q}^S$, aber auch schon der $\mathfrak{q}^{S'}$ mit S' aus $\mathfrak{F} = \{S_0, S_1, \ldots,\}$, d. h. derjenigen $\mathfrak{q}^S$, die durch Vorzeichenänderung nur endlich vieler Quadratwurzeln in der Idealbasis von $\mathfrak{q}$ entstehen, dies nach Satz II wegen $\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{G}$. Die Aussagen von Satz III und IV vereinfachen sich hier wesentlich, weil der Potenzzerfall endlich ist: Ist $\mathfrak{j}$ ein k. g. V. von Potenzen der $\mathfrak{q}^S$, so sind deren Exponenten r_S volle Viertel (für $p > 2$ volle Halbe), und die Darstellung ist vollständig, wenn kein r_S echtes Minimum in einer Umgebung von S ist. Es ist $\mathfrak{j}$ Teiler von $\mathfrak{j}'$, wenn in voller Darstellung $r_S \leqq r'_S$, und obendrein Faktor von $\mathfrak{j}'$, wenn $r'_S - r_S$ für kein S echtes Minimum in einer Umgebung ist. Faktoren einer Primzahl p sind infolgedessen nur die Teiler mit endlicher Idealbasis, die also schon als Ideal eines endlichen Teilkörpers von K ausdrückbar sind.

C. Es sei K der Körper aller Einheitswurzeln. Hier hat die Idealtheorie schon die volle Kompliziertheit, die sie im Körper aller algebraischen Zahlen hat. Während dieser aber eine unübersichtliche Galoisgruppe hat, hat die von K folgende einfache Gestalt: Es ist $\mathfrak{G}$ das unendliche direkte Produkt aller Trägheitsgruppen $\mathfrak{T}_p$ der einzelnen Primzahlen p und dies wieder die abgeschlossene Hülle der aus allen $\mathfrak{T}_p$ erzeugten Gruppe. Die einzelnen $\mathfrak{T}_p$, von denen wir $\mathfrak{T}_2$ schon kennen, haben für ungerades p die Form $\mathfrak{T}_p = \{T_p\} \cdot \overline{\{V_p\}}$, wobei das Trägheitselement T_p von der Ordnung $p-1$ den Körper der p-ten Einheitswurzeln permutiert, während der andere direkte Faktor, die Ver-

zweigungsgruppe von p, aus den p-adischen Potenzen von $V_p = (\zeta \to \zeta^{p+1})$ besteht. Für $p = 2$ hingegen ist ganz $\mathfrak{T}_2$ Verzweigungsgruppe und zerfällt in $\mathfrak{T}_2 = \{V_2\} \cdot \overline{\{W_2\}}$, wobei das Verzweigungselement $V_2 = (\zeta \to \zeta^{-1})$ der Ordnung 2 die vierten Einheitswurzeln permutiert, während der andere direkte Faktor, die höhere Verzweigungsgruppe von 2, aus den dyadischen Potenzen von $W_2 = (\zeta \to \zeta^5)$ besteht. Zu beachten ist dabei, daß in dieser Bezeichnungsweise allgemein T_p und V_p für $(m, p) = 1$ den Körper der m-ten Einheitswurzeln in Ruhe lassen, also eine Angabe $V_p = (\zeta \to \zeta^a)$ nur für p^n-te Wurzeln gilt; die Substitution aus $\mathfrak{G}$, die jede Einheitswurzel ins Reziproke überführt, ist daher nicht V_2, sondern $V_2 \prod_p T_p^k$ bei $p = 2k + 1$.

Idealtheorie in K: Jede Primzahl p hat wegen unendlicher Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}_p$ unendlichen Potenzzerfall. Also haben wir hier mit Wertexponenten w und w^+ zu rechnen. Dabei kommt aber, wenn $\mathfrak{q}$ ein Primärteiler von p ist, das Ideal $\mathfrak{q}^w$ für rationales w nur dann in K vor, wenn der Nenner von w gekürzt cp^n lautet, wo $c \mid p - 1$, wie aus der Gestalt von $\mathfrak{T}_p$ folgt. (Hier liegt ein Unterschied gegen den Körper aller algebraischen Zahlen vor, wo für jedes p alle Exponenten w und w^+ vorkommen.) Die Zerlegungskörper sind aber auch alle unendlich, wie schon daraus folgt, daß K das oben behandelte Produkt aller quadratischen Körper enthält. Erst die in Satz III eingeführten Wertelimites beantworten dann alle Teilbarkeitsfragen in K.

Zur Erläuterung von Satz III und IV betrachten wir einige Ideale aus K, die k. g. V. von Potenzen eines Primärideales $\mathfrak{q} \mid 2$ und seiner Konjugierten $\mathfrak{q}_a = \mathfrak{q}^{T_p a}$ sind: Dabei sind die $\mathfrak{q}_a$ alle voneinander und von $\mathfrak{q}$ verschieden; denn für $\mathfrak{q}_a = \mathfrak{q}_n$ oder $= \mathfrak{q}$ gehörte $T_a T_n^{-1}$ oder T_a der Zerlegungsgruppe von 2 an, die aber außerhalb der Trägheitsgruppe nur unendliche Produkte der T und V enthält (vgl. die Gestalt der $\mathfrak{Z}_2$ im Beispiel **B**); hier lautet sie

$$(12) \qquad \overline{\{F\}} \cdot \{V_2\} \cdot \overline{\{W_2\}}, \text{ wo } F = F_3 F_5 F_7 F_{11} \cdots \text{ und } F_p = T_p^x V_p^y$$

Vertreter der Frobenius-Substitution von 2 im Körper der p^∞-ten Einheitswurzeln. Es bilden aber $T_3, T_5, T_7, T_{11}, \ldots$ eine gegen das Einheitselement gehende Fundamentalfolge, weil die aus den Resten der Folge erzeugten abgeschlossenen Untergruppen $\overline{\{T_p, \ldots\}}$ den Durchschnitt 1 haben (wie in **B** die Gruppen $\overline{\{S_n, \ldots\}}$). Die genaue Potenz von $\mathfrak{q}$, die in einem aus den $\mathfrak{q}_a$ zusammengesetzten Ideal aufgeht, ist dann nach Satz III zu ermitteln, z. B.

$\mathfrak{i} = \Lambda \mathfrak{q}_a$ enthält $\mathfrak{q}$ in der genauen Potenz $\mathfrak{q}^1$,
$\mathfrak{i}' = \Lambda \mathfrak{p}_{2a}$ „ $\mathfrak{q}$ „ „ „ „ $\mathfrak{q}^{0+} = \mathfrak{p}$,
$\mathfrak{j} = \Lambda \mathfrak{q}_a^{1:2^a}$ „ $\mathfrak{q}$ „ „ „ „ $\mathfrak{p}$,
$\mathfrak{j}' = \Lambda \mathfrak{q}_a^{\left(1-\frac{1}{2^a}\right)}$ „ $\mathfrak{q}$ „ „ „ „ $\mathfrak{q}^1$,
$\mathfrak{k} = \Lambda \mathfrak{p}_a \cap \mathfrak{q}$ „ $\mathfrak{q}$ „ „ „ „ $\mathfrak{q}^1$,
$\mathfrak{l} = \Lambda \mathfrak{p}_a \mathfrak{q}_a^{\left(1-\frac{1}{2^a}\right)} \cap \mathfrak{q}$ „ $\mathfrak{q}$ „ „ „ „ $\mathfrak{q}^1$ ($\mathfrak{p}_a$ Primteiler von $\mathfrak{q}_a$).

Es ist aber $\mathfrak{i}$ nicht etwa das Produkt von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$, sondern $\mathfrak{j}\mathfrak{j}'$ muß $\mathfrak{q}$ nach Satz IV in der Potenz $\mathfrak{q}^{0+1} = \mathfrak{q}^{1+} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$ enthalten, also $\mathfrak{j}\mathfrak{j}' = \Lambda \mathfrak{q}_a \cap \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}\mathfrak{i}$. Ebenso geht genau $\mathfrak{q}^{1+}$ in

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i}' = \Lambda \mathfrak{p}_{2a} \mathfrak{q}_{2a} \cap \Lambda \mathfrak{q}_{2a+1} = \Lambda \mathfrak{q}_{2a}^{1+} \cap \Lambda \mathfrak{q}_{2a+1}$$

auf, worin das Zeichen $\cap$ nicht fehlen darf; denn das Produkt der beiden Λ ist schon durch $\mathfrak{q}^{2+}$ teilbar. Ist bei diesen Idealen in der in Satz III. 6 ausgeführten Trennung $\mathfrak{p}^{\bar{v}} \mathfrak{q}^{\bar{w}}$ die genaue in ihnen enthaltene $\mathfrak{q}$-Potenz, und sind $\varepsilon, w, \varepsilon_a, w_a$ die n ihrer k. g. V.-Darstellung angegebenen Exponenten von $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{q}_a$ und $\lim w_a = \tilde{w}$, so wird

$$\bar{w} = \mathrm{Max}\,(w, \tilde{w})$$

und $\bar{\varepsilon} = 0$ bei I nach a) wegen $\varepsilon = 0$, bei j′ nach b) wegen $w_a < w' = \bar{w}$, bei i nach b) wegen $w_a = w'$, aber $\varepsilon_a = 0$; bei I nach c) wegen $\varepsilon = 0$ und $w_a < w'$. Dagegen ist $\bar{\varepsilon} = 1$ für ii′ nach b) und für i′, j, jj′ nach c): für jj′ wegen $\varepsilon = 1$, für j wegen $w_a > w'$ und für i′, weil $w_a = w'$ und für beliebig hohes a (nahe Umgebung) noch $\varepsilon_a = 1$ vorkommt.

Die Rechnung wird jedoch einfacher bei ungeteilten Exponenten $\bar{v} = \mathrm{Max}\,(v, \tilde{v})$ mit $\tilde{v} = \lim v_a$. Sinngemäß wird man $\mathfrak{q}$ als den Galoislimes der $\mathfrak{q}_a$ ansehen und allgemein $\mathfrak{q}^{\tilde{v}}$ als den Galoislimes der Folge $\mathfrak{q}_a^{v_a}$.

Schließlich betrachten wir noch das Ideal

$$\mathfrak{m} = \Lambda \mathfrak{q}_a^{\sum_{i=1}^{a} \frac{1}{4^i}} = \Lambda \mathfrak{q}_a^{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^a}\right)} \tag{13}$$

in K und Ω. Da die Exponenten der $\mathfrak{q}_a$ eine aufsteigende Folge mit dem Limes $\frac{1}{3}$ bilden, enthält es $\mathfrak{q}$ in Ω in der Potenz $\mathfrak{q}^{\frac{1}{3}}$. Aber diese Potenz liegt nicht in K, sondern nur Potenzen $\mathfrak{q}^w$, wo der Nenner von w wegen $\mathfrak{q} \mid 2$ (wie oben festgestellt) eine Potenz von 2 ist, und daher teilt $\mathfrak{q}$ das Ideal $\mathfrak{m}(K)$ in der Potenz $\mathfrak{q}^{\frac{1}{3}+}$, es ist

$$\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{p}\mathfrak{m}(\Omega) \text{ und } \mathfrak{m}(\Omega) = (\sqrt[3]{2},\ \mathfrak{m}(K)).$$

Es ist aus diesem Grunde auch $\mathfrak{m}(K)^3 = \mathfrak{p}\Lambda\mathfrak{q}_a^{1-1:4^a}$, also die dritte Potenz des Durchschnitts nicht einfach der Durchschnitt der dritten Potenzen. Dies ist innerhalb eines Körpers K eine Besonderheit, die bei endlicher Durchschnittsbildung nicht auftritt. (Nur bei Durchschnittsbildung mit anderen Körpern hat man z. B. $(\sqrt[3]{2})^3 \cap P = 2$, während $((\sqrt[3]{2}) \cap P)^3 = 4$ ist.) Das Ganze spricht dafür, $\mathfrak{m}(\Omega)$ als das eigentliche Ideal $\mathfrak{m}$ aufzufassen, also wie zu Anfang alle Ideale in Ω zu betrachten. Dann ist $\mathfrak{m}(K)$ lediglich als $\mathfrak{m} \cap K$ aufzufassen, und es braucht ein unendlicher Durchschnitt von K-Idealen (durch Zahlen aus K erzeugbaren Idealen) selbst kein K-Ideal zu sein, in Analogie etwa zu der Tatsache, daß eine Folge rationaler Zahlen einen irrationalen Grenzwert haben kann.

Wir vergleichen nun noch den Idealzerfall in einem beliebigen (unendlichen) Zahlkörper K′ mit dem Zerfall in einem K′ enthaltenden Galoiskörper K, etwa dem Normalkörper NK' von K′. Da gilt entsprechend dem Dedekindschen Satz[4]):

Satz V. 1. *Ist* K *ein unendlicher Galoiskörper mit der Gruppe* $\mathfrak{G}$, *und* K′ *der zur abgeschlossenen Untergruppe* $\mathfrak{H}$ *von* $\mathfrak{G}$ *gehörige Unterkörper von* K, *sind* $\mathfrak{Z}$ *und* $\mathfrak{T}$ *die Zerlegungs- und Trägheitsgruppe eines Primteilers* $\mathfrak{p}$ *der Primzahl* p *in* K *mit der Primärkomponente* $\mathfrak{q}$, *so stellen die Ideale* $\mathfrak{q}'(S) = \bigwedge_{H \text{ in } \mathfrak{H}} \mathfrak{q}^{SH}$ *alle Primärkomponenten von* p *in* K′ *dar.* **2.** *Ist* $\mathfrak{G} = \Sigma \mathfrak{Z} S \mathfrak{H}$ $(= \Sigma S \mathfrak{Z}^S \mathfrak{H})$ *eine zweiseitige Zerlegung von* $\mathfrak{G}$ *nach dem Doppelmodul* $(\mathfrak{Z}; \mathfrak{H})$, *so erhält man alle verschiedenen* $\mathfrak{q}'(S)$ *genau einmal, wenn man* S *ein vollständiges Restsystem* mod $(\mathfrak{Z}; \mathfrak{H})$ *durchlaufen läßt.* **3.** *Ist dabei* K′ *oder der Zerlegungskörper* Z *von* $\mathfrak{p}$ *normal, so ist* $\mathfrak{Z}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{Z}$ (sonst $\mathfrak{H} \wedge \mathfrak{Z}^H$ mit H in $\mathfrak{H}$) *die Untergruppe von* $\mathfrak{G}$, *die* $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}'(E)$ *invariant läßt. Entsprechend bleibt* $\mathfrak{q}'(S)$ *bei* $\mathfrak{Z}^S\mathfrak{H}$ *invariant. Dasselbe gilt für die Primteiler* $\mathfrak{p}'$ *und* $\mathfrak{p}'(S)$ *von* $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}'(S)$. **4.** *Der Restklassenkörper* mod $\mathfrak{p}'$ *ist dadurch gekennzeichnet, daß seine idealzyklische Galoisgruppe* $\mathfrak{C} = \overline{\{C\}}$ *zu* $\mathfrak{Z}/(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H})\mathfrak{T} = \mathfrak{Z}/\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H}\mathfrak{T}$ *isomorph ist (entsprechend die von* $\mathfrak{p}'(S)$ *zu* $\mathfrak{Z}^S/\mathfrak{Z}^S \cap \mathfrak{H}\mathfrak{T}^S$). **5.** *Das Primideal* $\mathfrak{p}'$ *hat einen endlichen Grad* f' *oder unendlichen Grad, je nachdem* $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H}\mathfrak{T}$ *in* $\mathfrak{Z}$ *den Index* f' *oder unendlichen Index hat* ($\mathfrak{Z}$ mod $\mathfrak{H}\mathfrak{T}$ *in* f' *oder unendlich viele Restklassen zerfällt*). **6.** *Es ist* $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H}\mathfrak{T}$ *die Untergruppe von* $\mathfrak{G}$, *die jede in* K′ *vertretene Restklasse* mod $\mathfrak{p}$ *in sich überführt und im Fall des Satzes* V. 3 *auch die Untergruppe, die jede Restklasse* mod $\mathfrak{p}'$ *ungeändert läßt, während* $\mathfrak{H}\mathfrak{T}$ *das System ist, das jede Zahl aus* K′ *in eine zu ihr* mod $\mathfrak{p}$ *kon-*

gruente Zahl überführt. 7. Das Primideal $\mathfrak{p}'(S)$ ist endlich vom Exponenten e' oder unendlich, je nachdem $\mathfrak{T}^S$ mod $\mathfrak{H}$ in e' oder unendlich viele Restklassen zerfällt.

Beweis. 1. Sei wieder K_n eine Normalkörperfolge mit der Vereinigung K und der Untergruppenfolge $\mathfrak{H}_n$. Für den endlichen Körper $K'_n = K' \cap K_n$ zur Untergruppe $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_n\} = \mathfrak{H}\mathfrak{H}_n$ ist sicher $\mathfrak{q}^S \cap K'_n = \Lambda \mathfrak{q}^{SHH_n}$, wo HH_n die Gruppe $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_n$ durchläuft; denn weil K'_n bei HH_n in Ruhe bleibt, ist jedes $\mathfrak{q}^{SHH_n}$ Teiler, aber auch kein weiteres $\mathfrak{q}^X$, weil alle Primärkomponenten nach Satz I. 1 in bezug auf den endlichen K'_n konjugiert sind. Nun ist $\mathfrak{q}'(S) = \mathfrak{q}^S \cap K' = \mathfrak{q}^S \cap \mathsf{V} K'_n = \mathsf{V}(\mathfrak{q}^S \cap K'_n) = \mathsf{V}_n \Lambda_{H,H_n} \mathfrak{q}^{SHH_n} = \bigwedge_H \mathfrak{q}^{SH}$ wegen $H_n \to E$ bei $n \to \infty$.

2. Genau dann wird $\Lambda \mathfrak{q}^{S'H} = \Lambda \mathfrak{q}^{SH}$, wenn jedes $\mathfrak{q}^{S'H}$ mit einem $\mathfrak{q}^{SH'}$ übereinstimmt, wenn also zu H ein H' aus $\mathfrak{H}$ und umgekehrt paßt, daß $\mathfrak{J}S'H = \mathfrak{J}SH'$ wird, oder $\mathfrak{J}S'\mathfrak{H} = \mathfrak{J}S\mathfrak{H}$ ist.

3. Jedenfalls ist $\mathfrak{q}'^H = \mathfrak{q}'$, weil $\mathfrak{q}'$ Ideal in K'. Wegen $\mathfrak{q}' = \Lambda \mathfrak{q}^H$ ist für Z aus $\mathfrak{J}$ auch $\mathfrak{q}'^Z = \Lambda \mathfrak{q}^{HZ} = \Lambda \mathfrak{q}^{ZH^Z} = \Lambda \mathfrak{q}^{H^Z} = \mathfrak{q}'$, wenn $\mathfrak{H}$ invariant, also $\mathfrak{H}^Z = \mathfrak{H}$ ist. (Ist $\mathfrak{J}$ ohne $\mathfrak{H}$ invariant, erhält man $\Lambda \mathfrak{q}^{HZ} = \Lambda \mathfrak{q}^{(HZH^{-1})H} = \Lambda \mathfrak{q}^H$, weil dann HZH^{-1} in $\mathfrak{J}$ liegt und darum $\mathfrak{q}$ invariant läßt.) Umgekehrt muß für $\mathfrak{q}'^J = \mathfrak{q}'$ auch $\mathfrak{q}^J$ unter den Teilern $\mathfrak{q}^H$ von $\mathfrak{q}'$ vorkommen, d. h. $J = ZH$ darstellbar sein. Für $\mathfrak{p}' = \mathsf{V}_{r>0} \mathfrak{q}'^r$ gilt dann dasselbe.

4. (enthält 5.). Wir betrachten zuerst endliches K. Hat $\mathfrak{p}$ in K den Grad f und Exponenten e, so ist Ord $\mathfrak{J} = ef$ und Ord $\mathfrak{T} = e$. Sind ferner f' und e' Grad und Exponent von $\mathfrak{p}'$, zugleich dann f' der Grad des Unterkörpers Φ' der K'-Restklassen mod $\mathfrak{p}$, so sind $f:f' = d$ und $e:e' = c$ der Relativgrad und Relativexponent von $\mathfrak{p}$ bezüglich K', und es sind Ord $(\mathfrak{J} \cap \mathfrak{H}) = cd$ und Ord $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{H}) = c$ die Ordnungen der Relativzerlegungs- und -trägheitsgruppe. Die Gruppe $\mathfrak{R} = (\mathfrak{J} \cap \mathfrak{H})\mathfrak{T}$ hat die Ordnung $cde:c = de$, weil $\mathfrak{T} \cap (\mathfrak{J} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{T} \cap \mathfrak{J} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{T} \cap \mathfrak{H}$ die Ordnung c hat. Also hat $\mathfrak{J}/\mathfrak{R}$ die Ordnung $fe:de = f'$ und ist mit $\mathfrak{J}/\mathfrak{T}$ auch zyklisch, beides wie die Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ des Restklassenkörpers mod $\mathfrak{p}'$. Es stellt sogar $\mathfrak{J}/\mathfrak{R}$ über die abstrakte Isomorphie mit $\mathfrak{G}$ hinaus die Automorphismengruppe der in K' vertretenen Restklassen mod $\mathfrak{p}$ dar (vgl. V. 6), weil die Elemente aus $\mathfrak{R}$ jede dieser Restklassen sicher invariant lassen, aber auch ihre Antomorphismengruppe die Ordnung f' haben muß und daher keine echte Faktorgruppe von $\mathfrak{J}/\mathfrak{R}$ sein kann. Das werden wir nachher brauchen.

Sei jetzt K' noch endlich, aber K unendlich. Wir wenden dann das eben für einen endlichen K gewonnene auf alle Körper K_n ($n \geqq i$) an, die bereits K' enthalten. Nach den früheren Bezeichnungen ist dann oben $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{J}_n/\mathfrak{H}_n$, $\mathfrak{T}_n/\mathfrak{H}_n$, $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_n$ zu ersetzen, und es geht $\mathfrak{J}/\mathfrak{R}$ nach Kürzung durch $\mathfrak{H}_n$ über in $\mathfrak{J}_n/\mathfrak{R}_n$ mit $\mathfrak{R}_n = \mathfrak{J}_n \cap \mathfrak{H}\mathfrak{T}_n$. Es zerfällt

$$(14) \qquad \mathfrak{J}_n = \mathfrak{R}_n + \mathfrak{R}_n C + \mathfrak{R}_n C^2 + \cdots + \mathfrak{R}_n C^{f'-1} \text{ mit } C \text{ aus } \mathfrak{J},$$

weil nach 3. bereits $\mathfrak{J}\mathfrak{H}_n = \mathfrak{J}_n$ ist und $\mathfrak{H}_n$ in $\mathfrak{R}_n$ liegt. Es kann dabei für alle $\mathfrak{J}_n$ dasselbe C wie für $\mathfrak{J}_i$ verwandt werden, weil C mit $\mathfrak{J}$ in jedem $\mathfrak{J}_n$ liegt und wegen $\mathfrak{R}_n < \mathfrak{R}_i$ keine frühere Potenz von C in $\mathfrak{R}_n$ liegen kann als in $\mathfrak{R}_i$. Der Durchschnitt aus (14) gibt

$$(15) \qquad \mathfrak{J} = \mathfrak{R} + C\mathfrak{R} + C^2\mathfrak{R} + \cdots + C^{f'-1}\mathfrak{R} \quad \text{mit } \mathfrak{R} = (\mathfrak{J} \cap \mathfrak{H})\mathfrak{T}.$$

Also wieder $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{J}/(\mathfrak{J} \cap \mathfrak{H})\mathfrak{T}$.

Nun sei auch K' als unendlich zugelassen. Der Körper Φ'_n der in $K'_n = K' \cap K_n$ vertretenen Restklassen mod $\mathfrak{p}$ hat nach dem Letztgewonnenen die Gruppe $\mathfrak{J}/(\mathfrak{J} \cap \mathfrak{H}\mathfrak{H}_n)\mathfrak{T}$, also der Körper Φ' der in $K' = \mathsf{V} K'_n$ vertretenen Restklassen wegen $\Phi' = \mathsf{V}\Phi'_n$ (vgl. den Kleindruck vor Satz I) die Gruppe $\mathfrak{J}/(\mathfrak{J} \cap \bigwedge_n \mathfrak{H}\mathfrak{H}_n)\mathfrak{T} = \mathfrak{J}/(\mathfrak{J} \cap \mathfrak{H})\mathfrak{T}$, weil $\Lambda \mathfrak{H}_n = 1$.

6. Für α in K' ist $\alpha^{HT} = \alpha^T \equiv \alpha \bmod \mathfrak{p}$, also α bei $\mathfrak{H}\mathfrak{T}$ invariant mod $\mathfrak{p}$. Aber nur wenn dabei H, wie T es tut, in $\mathfrak{J}$ liegt, bleibt die Restklasse von α mod $\mathfrak{p}$ invariant, weil sie nur bei Substitutionen aus $\mathfrak{J}$ wieder in eine Restklasse mod $\mathfrak{p}$ übergeht. Sei

solchen Substitutionen aus $\mathfrak{Z}$ aber, die außerhalb $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H}\mathfrak{T}$ liegen, entsteht nach 4. eine andere Restklasse.

7. Für endliches K ist der Satz nach 4. richtig: Wegen Ord $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{H}) = c$ zerfällt $\mathfrak{T}$ mod $\mathfrak{H}$ in $e:c = e'$ Restklassen, und dies war der Exponent von $\mathfrak{p}'$. Für unendliches K habe $\mathfrak{p}'_n$ in K'_n den Exponenten e'_n. Es zerfällt dann $\mathfrak{T}_n$ mod $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_n$ in e'_n Restklassen. Behält der Exponent von einem n an den Wert e', so läßt sich wie oben bei 4. die Gruppe

$$\mathfrak{T}_n = T_1\mathfrak{H}\mathfrak{H}_n + T_2\mathfrak{H}\mathfrak{H}_n + \cdots + T_{e'}\mathfrak{H}\mathfrak{H}_n \quad (n > i) \tag{16}$$

mit einem festen Restsystem $T_1, \ldots, T_{e'}$ aus $\mathfrak{T}$ zerlegen, weil $\mathfrak{T}\mathfrak{H}_n = \mathfrak{T}_n$ aus Anwendung von 3. und 6. auf K_n hervorgeht. Der Durchschnitt aus (16) gibt

$$\mathfrak{T} = T_1\mathfrak{H} + T_2\mathfrak{H} + \cdots + T_{e'}\mathfrak{H}. \tag{17}$$

Wächst aber der Exponent von $\mathfrak{p}'_n$ mit n über alle Grenzen, so kann $\mathfrak{T}$ mod $\mathfrak{H}$ nicht in endlich viele Klassen zerfallen, weil aus einer Darstellung (17) auch die Darstellung (16) durch Multiplikation mit $\mathfrak{H}_n$ folgt. Damit ist alles bewiesen.

Die Angabe: Grad f und Exponent e eines Primideals $\mathfrak{p}$ gibt im Fall Unendlich weder über die Struktur des Restklassenkörpers mod $\mathfrak{p}$ vollen Aufschluß noch über die Menge der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale. Hier helfen die schon oben erwähnten Steinitz-Herbrandschen Idealzahlen (H. I, S. 477): Mit $K = VK_n$, $\mathfrak{p} = V\mathfrak{p}_n$ und $\Phi = V\Phi_n$ für den Restklassenkörper mod $\mathfrak{p}$ führt man auch für die Gradfolge f_n einen $\lim f_n = f$ ein, der bei schließlich konstant bleibendem f_n diesen Wert habe, sonst aber ein ideales Potenzprodukt $\Pi l_i^{z_i}$ $(0 \leqq z_i \leqq \infty)$ aller Primzahlen l_i, dessen Exponent z_i die obere Grenze aller z_{in} in $f_n = \Pi l_i^{z_{in}}$ ist. Dieses f gibt dann genau die Struktur des Restklassenkörpers mod $\mathfrak{p}$ an: Er enthält, abstrakt gesprochen, das Galoisfeld f'-ten Grades (f' endlich) genau dann, wenn für $f' = \Pi l_i^{z'_i}$ jedes $z'_i \leqq z_i$ ist, d. h. wenn f' in einem f_n aufgeht. Ebenso wie f symbolisch das k. g. V. aller f_n wird, kann e als k. g. V. aller e_n gewertet werden, und es ist $\mathfrak{q}^{1/e'}$ Ideal in K, wenn $e' \mid e$.

Der Exponent ∞ hat hier die Wirkung der Ordinalzahl ω, weswegen man besser ω statt ∞ schriebe, obwohl kein höherer Exponent als ω vorkommt (jedoch in der Kompositionsreihe der Trägheitsgruppe, siehe unten): Hat man einen Unterkörper K', in dem $\mathfrak{p} \cap K' = \mathfrak{p}'$ den Grad $f' \mid f$ hat, und enthalten f' und f die Primzahl l in a-ter und ω-ter Potenz, so hat $\mathfrak{p}$ bezüglich K' den Relativgrad $f:f'$, der l in $(\omega - a)$-ter Potenz enthält, wo $\omega - a = \omega$ für endliches a und $\omega - \omega = 0$ zu setzen ist; denn wenn der Restklassenkörper Φ' in K' schon das p-Galoisfeld l^ω-ten Grades enthält, so ist Grad Φ/Φ' oder der Grad jeder endlichen Erweiterung von Φ' prim zu l, weil ja alle Reste l^m-ten Grades mit endlichem m schon in Φ' liegen. Ist aber f und der Relativgrad d von $\mathfrak{p}$ bezüglich K' bekannt, so kann bei $l^\omega \mid f$ nur l^0 oder l^ω in d aufgehen, und im letzten Fall läßt sich daraus nicht die in f' enthaltene Potenz von l bestimmen, entsprechend der Tatsache, daß die Rechtssubtraktion der Ordinalzahlen weder immer durchführbar noch durchweg eindeutig ist. Daher kann auch der Beweis von Satz V. 4 nicht unmittelbar durch Übertragung seines endlichen Teils ins Unendliche geführt werden.

Dasselbe gilt für den durch e angezeigten Potenzzerfall. Hier muß man nur im Fall, daß $\mathfrak{p}'$ schon unendlich und dann $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^a$ für beliebiges a ist, auch $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}^{e'}$ schreiben, wobei der Quotient $e:e'$ in oben angegebener Weise durch Differenz der l-Exponenten zu bilden ist und die konkrete Bedeutung hat, die ihm Deuring[9]) beigemessen hat: daß sich der rationale Wertevorrat der endlichen $\mathfrak{p}$-Primärideale beim Übergang von K' zu K ver-$e:e'$-facht. In unserem Beispiel A des Körpers K der 3^ω-ten Einheitswurzeln heißt das z. B., daß der (unendliche) Primteiler $\mathfrak{p}'$ von 3 im reellen Unterkörper K' als das Quadrat von $\mathfrak{p}$ anzusehen ist, weil in K' endliche Primärideale 3^w nur für w mit einem Nenner 3^a vorkommen, während w in K auch einen Nenner $2 \cdot 3^a$ haben kann.

[9]) A. a. O. [6]), S. 279 und 280/81.

Trotzdem kann noch eine Diskrepanz zwischen Relativexponent und Ordnung der Relativträgheitsgruppe auftreten, wie Deuring[19]) am Beispiel des 2-Zerfalls im Körper K der 2^ω-ten Einheitswurzeln bezüglich seines reellen Unterkörpers K' zeigte: hier stimmen die 2-Primärteiler in beiden Körpern überein: bei den 2^w haben in beiden Körpern die rationalen w einen beliebigen Nenner 2^e. Aber die Gruppe von K/K' gehört zur Trägheitsgruppe von 2, weil schon die absolute Galoisgruppe von K ganz Trägheitsgruppe von 2 ist.

Diese Diskrepanz rührt hier nun daher, daß man den Körper K der 2^ω-ten Einheitswurzeln einmal in eine Kompositionsreihe von ω Gliedern entwickeln kann, deren n-tes Glied der Körper K_n der 2^{n+1}-ten Einheitswurzeln ist (unsere normale Entwicklung $K = \bigvee K_n$), oder man bildet die Kompositionsreihe $P < K'_2 < K'_3 < \cdots < K' < K$ von $\omega + 1$ Gliedern, in der K'_n der reelle Unterkörper von K_n ist. Da die Trägheitsgruppe von 2 die ganze Gruppe war, hat sie den Faktor 2 in der normalen Kompositionsreihe ω-mal, in der letztgenannten aber $(\omega + 1)$-mal, d. h. auch in K/K' ist 2 noch träge. Doch der Exponent e reicht als Kardinalzahl nur bis zur Mächtigkeit ω, erreicht diesen Wert schon in K' und kann sich daher von K' nach K nicht vergrößern, d. h. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.

Allgemeine Frage: Welche abzählbare Ordinalzahl an Wiederholungen kann in einer Kompositionsreihe ein Trägheitsprimindex l erreichen? Der Körper Ω aller algebraischen Zahlen läßt jedenfalls Kompositionsreihen mit beliebig viel abzählbaren Gliedern zu: Wir greifen aus Ω zuerst den Körper X aller quadratischen Irrationalitäten (Beispiel **B**) heraus, bringen die Erzeugenden $\sqrt{p_n}$ in eine vorgegebene abzählbare Wohlordnung von α Gliedern und bilden in dieser Reihenfolge durch sukzessive Erzeugung eine Kompositionsreihe der Länge α für X, die wir über $X\Omega_1$, $X\Omega_2$, ... mit Zwischenkompositoren bis Ω fortsetzen (Ω_n endlich, $\bigvee \Omega_n = \Omega$). Diese Kompositionsreihe für Ω hat die Länge $\alpha + \omega$. Auch kommt 2 in ihr als Kompositionsindex $(\alpha + \omega)$-mal vor (bis X bei allen α Gliedern und nachher noch ω-mal durch Adjunktionen $\sqrt[4]{a}$). Aber als Trägheitsindex irgendeines p kommt hier 2 nur ω-mal vor, weil bis X nur ein- bis zweimal. Die gestellte Frage hängt wesentlich von der Ausbreitung der Verzweigungsgruppen $\mathfrak{B}$ ab; für die idealzyklischen $\mathfrak{T}/\mathfrak{B}$ kommen für die $\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$ nur ω Wiederholungen in Betracht.

Die Gruppe $\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$ eines Primideals $\mathfrak{p}$ in $K = \bigvee K_n$ wird eine idealzyklische der Ordnung f, wo f der Idealgrad von $\mathfrak{p}$, in folgendem Sinne: Ist α_n eine Erzeugende von K_n, so ist $\alpha_n^{\mathfrak{p}} \equiv \alpha_n^{S_n}$ ein zu α_n konjugierter Rest mod $\mathfrak{p}$ und S_n die hier mod $\mathfrak{T}_n$ eindeutig bestimmte Frobenius-Substitution von $\mathfrak{p}_n$, und es zerlegt sich

$$\mathfrak{Z}_n = \mathfrak{T}_n + S_n\mathfrak{T}_n + S_n^2\mathfrak{T}_n + \cdots + S_n^{f_n-1}\mathfrak{T}_n.$$

Die Frobenius-Restklassen mod $\mathfrak{T}_n$ bilden die Umgebungsfolge einer bestimmten Restklasse mod $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{Z}$, deren jeder Repräsentant C die Eigenschaft der zu $\mathfrak{p}$ in K gehörigen Frobenius-Substitution hat, daß $\alpha^{\mathfrak{p}} \equiv \alpha^C$ mod $\mathfrak{p}$ für jedes α aus K gilt. — Wegen $S_n \equiv C$ mod $\mathfrak{T}_n$ kann man wieder.

$$\mathfrak{Z}_n = \mathfrak{T}_n + C\mathfrak{T}_n + \cdots + C^{f_n-1}\mathfrak{T}_n, \quad \mathfrak{T}_n = \mathfrak{H}_n\mathfrak{T}, \tag{18}$$

zerlegen und erhält wie im Beispiel **A** für jedes Element aus $\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$ eine Fundamentalfolge

$$C^{c_0}(C^{f_1})^{c_1} \ldots (C^{f_{n-1}})^{c_{n-1}}\mathfrak{H}_n\mathfrak{T} = C^{c_0 + c_1 f_1 + \cdots + c_{n-1} f_{n-1}}\mathfrak{H}_n\mathfrak{T} \tag{19}$$

mit $0 \leq c_i < f_{i+1}/f_i$, deren Limes man dann wieder mit

$$C^{c_0 + c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n + \cdots}\mathfrak{T} \tag{20}$$

bezeichnen kann. Die Darstellung ist eindeutig von der Körperfolge K_n oder der Gradfolge f_n abhängig. Eine andere gegen f gehende Gradfolge ändert die Gestalt des Exponenten von C. Das Kriterium aber dafür, daß der neue Exponent dieselbe Potenz

[19]) A. a. O. [8]), S. 295.

von C liefert wie der alte, ist, daß beide Exponenten nach jedem endlichen $f' \mid f$ einander kongruent sind. Somit kennzeichnet f eindeutig die Struktur der idealzyklischen Gruppe $\{\overline{C}\}$ als seine „ideale Ordnung". Die Isomorphieaussage des Satzes V. 4 kann dann in eine Ordnungsaussage umgewandelt werden, als Präzisierung von V. 5 für unendlichen Grad. Wir fassen alles zusammen in

Satz VI. 1. *Im unendlichen Normalkörper* K *gehört zu jedem Primideal eine rechts* mod $\mathfrak{T}$ *eindeutige Frobenius-Substituton* C, *die bei* $\mathfrak{p} \mid p$ *aus jeder der beiden Relationen*

$$\alpha^p \equiv \alpha^C \bmod \mathfrak{p} \quad \textit{und} \quad C = \lim S_n \quad \textit{mit} \quad \alpha_n^p \equiv \alpha_n^{S_n}(\mathfrak{p}_n) \quad \textit{in} \quad \mathsf{K}_n \tag{21}$$

hervorgeht. 2. *Es ist dann* $\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$ *die idealzyklische Gruppe* $\{\overline{C\mathfrak{T}}\}$, *und diese hat den Grad* f *von* $\mathfrak{p}$ *zur idealen Ordnung.* 3. *Der Grad* f' *des Primideals* $\mathfrak{p}'$ *im Körper* K' *zur Gruppe* $\mathfrak{H}$ *ist gleich der Idealordnung von* $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H}\mathfrak{T}$ (Satz V. 4, 5). 4. *Es hat* $\mathfrak{p}$ *über* K' *den Relativgrad* $f:f' = \Pi l_i^{z_i - z_i'}$ (z_i, z_i' *Exponenten in* f, f'); *dabei ist* $z_i = \infty$ *wie die Ordinalzahl* ω *zu behandeln.* 5. *Ebenso ist der Exponent* $e:e'$ *von* $\mathfrak{p}$ *über* K' *aus dem von* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}'$ *zu berechnen.* 6. *Die Ordnung der Relativträgheitsgruppe von* $\mathfrak{p}$ *über* K' *kann* $e:e'$ *übersteigen, aber als* $\ddot{a}:e'$ *gewertet werden, wo* $\ddot{a}$ *die Primzahl* l *in* η*-ter Potenz enthält und* $\eta \leqq \omega \cdot 2$ *anzeigt, wie oft und in welcher Vielfachheit* l *als Trägheitsfaktor in der Reihe*

$$\mathsf{P} < \mathsf{K}' \cap \mathsf{K}_1 < \cdots < \mathsf{K}' \cap \mathsf{K}_n < \cdots < \mathsf{K}' < \mathsf{K}'\mathsf{K}_1 < \cdots < \mathsf{K}'\mathsf{K}_n < \cdots < \mathsf{K}$$

vorkommt (l *als Faktor in der Indexreihe*

$$\mathfrak{T} > \cdots > \mathfrak{T} \cap \mathfrak{H}\mathfrak{H}_n > \cdots > \mathfrak{T} \cap \mathfrak{H} > \cdots > \mathfrak{T} \cap \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}_n > \cdots > E).$$

Herbrand zeigt (H. I, § 8), daß es Körper K gibt, über denen Ω relativ unendlich ist, und in denen alle Primideale ein e und f haben, die endliche Vielfache vorgegebener e' und f' sind. Hier ist hervorzuheben, daß der Maximalfall $e = f = \overline{\infty} = \Pi l_i^{\infty}$ bereits im Produkt M aller reinen (absolut Kummerschen) Körper eintritt: Im Körper K aller Einheitswurzeln sind bereits alle Primidealgrade $f = \overline{\infty}$; denn für feste Primzahlen p und l weisen alle $p^{l^a} - 1$ ($a = 1, 2, \ldots$) immer neue Primteiler auf, da

$$(p^{l^a} - 1) : (p^{l^{a-1}} - 1) \equiv l \bmod p^{l^{a-1}} - 1,$$

und daher gibt es stets eine Primzahl q, für die p zum Exponenten l^a gehört, so daß p im Körper der q-ten Einheitswurzeln in Primideale l^a-ten Grades zerfällt und damit in K den Grad $\overline{\infty}$ erreicht. Der Exponent von p ist in K jedoch erst $(p-1)p^{\infty}$ (siehe oben C). Da aber M alle $\sqrt[m]{p}$ enthält, ist dort auch jedes $e = \overline{\infty}$.

Zum Abschluss korrigieren wir eine Bemerkung von Moriya[11]), daß der Beweis von Herbrands Lemma 2 in H. I, S. 489 für endliche Körper K, K'

$$e_{KK'/K'} \mid e_K;\ f_{KK'/K'} = f_K : (f_K, f_{K'});\ e_0 \text{ wie } f$$

(e_0 Ordnung von $\mathfrak{T}/\mathfrak{B}$) falsch sei. Moriya behauptet dies, ohne eine Fehlerstelle anzugeben, und sagt, daß der Satz „in einigen Fällen gelte", ohne zu prüfen, ob er nicht doch allgemein richtig sei, oder nach einem Gegenbeispiel zu suchen. Mit dem Fehler meint Moriya gewiß die Gleichung auf S. 490 o., die in unsere Sprache übersetzt lautet

$$\mathrm{Ord}\,(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H})/(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{H}) = \mathrm{Ord}\,(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H})/(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{T} = \mathrm{Ord}\,\{\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H}, \mathfrak{T}\}/\mathfrak{T}$$

(Herbrand schreibt $\mathfrak{AB}$ für $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$) und deswegen richtig ist, weil $\mathfrak{T}$ invariant in $\mathfrak{Z}$ und darum auch wirklich $\{\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H}, \mathfrak{T}\} = (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H})\mathfrak{T}$, was Herbrand anzugeben unterläßt und Moriya wohl entgangen ist. Einen wirklichen Fehler habe ich in Herbrands Beweis nicht gefunden, und so dürfte er wohl richtig sein.

---

[11]) M. Moriya, Berichtigung zu meiner Arbeit: Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades aus Bd. 8, 107—130; Journal Fac. of Sc., Hokkaido Imp. Univ. 4 (1936), 121/22.

Eingegangen am 27. Januar 1942.

Über ebene Punktmengen, welche überall einen Sektor von gegebener Grösse freilassen.

Von *Christian Pauc* in Berlin.

Es sei $\mathfrak{M}$ eine Punktmenge in der euklidischen Ebene E_2. Mit Herrn Roger[1]) bezeichnen wir dann als *leeren Sektor für $\mathfrak{M}$ im Punkte P* einen abgeschlossenen Sektor $\mathfrak{S}$ mit P als Zentrum, welcher keine Punkte von $\mathfrak{M} - (P)$ enthält. Diejenigen *beschränkten* Punktmengen $\mathfrak{A}$ in E_2, für welche

(S) *in jedem ihrer Punkte ein leerer Sektor mit festgelegtem Radius $\varrho > 0$ und festgelegter Öffnung θ existiert* $(0 < \theta < \pi)$,

wurden von den Herren Kakeya-Kunugi[2]) und Kametani[3]) untersucht. Der von ihnen gewonnene Satz lautet: Das äußere lineare Maß (im Sinne von Carathéodory) von A ist endlich.

Die Betrachtungen, mit deren Hilfe Herr Roger[1]) seinen Satz über das Verhalten des Kontingents (Deriviertenbüschels, Halbtangentenmenge) einer beliebigen ebenen Menge beweist, liefern fast unmittelbar folgende Verschärfung des angeführten Satzes:

Jede, der Sektorbedingung (S) *genügende, beschränkte Menge $\mathfrak{A}$ in E_2 ist Teilmenge einer rektifizierbaren Kurve*[4]), *welche durch Aneinandersetzen von endlich vielen Lipschitzbogen entsteht*[5]).

Unter einem Lipschitzbogen verstehen wir dabei einen Bogen, welcher bei geeigneter Wahl eines (kartesischen) x, y-Koordinatensystems darstellbar ist durch $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, wobei $f(x)$ eine Lipschitzbedingung $|f(x_1) - f(x_2)| \leqq K|x_1 - x_2|$ (mit $K =$ konstant) erfüllt.

Den Beweis dieses Satzes[6]) kann man folgendermaßen führen. Die beschränkte Menge $\mathfrak{A}$ ist in einem Quadrat $\mathfrak{Q}$ enthalten. Wir zerlegen $\mathfrak{Q}$ in r^2 kongruente Teilquadrate $\mathfrak{Q}^{(j)}$, wobei wir r so groß wählen, daß der Durchmesser der $\mathfrak{Q}^{(j)}$ kleiner als ϱ ist. Dieser Zerlegung von $\mathfrak{Q}$ entspricht eine Zerlegung von $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} = \sum_j \mathfrak{A}^{(j)} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{A}^{(j)} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Q}^{(j)}, \quad j = 1, \ldots, r^2,$$

---

[1]) F. Roger, Les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points, Acta math. 69 (1938), 99—133.

[2]) S. Kakeya und K. Kunugi, A relation between the length of a plane curve and angles stretched by it, Proc. Imp. Acad. Jap. 13 (1937), 296—300.

[3]) S. Kametani, Some remarks on Kakeya-Kunugi's theorem, Jap. Journ. Math. 17 (1940), 27—30.

[4]) Unter „Kurve" ist in vorliegender Note eine orientierte Kurve (nicht eine Kurve im Sinne der Mengerschen Kurventheorie) zu verstehen, d. h. das stetige (eindeutige) Bild einer orientierten Strecke. Auftretende „Bogen" sind ebenfalls orientiert.

[5]) Darunter ist zu verstehen, daß der Endpunkt z. B. des (orientierten) Bogens $\mathfrak{B}_k$ mit dem Anfangspunkt des (orientierten) Bogens $\mathfrak{B}_{k+1}$ zusammenfällt.

[6]) Herrn Roger danke ich bestens für seine freundliche Hilfe bei der Ausarbeitung des Beweises.

wobei der Durchmesser von $\mathfrak{A}^{(j)}$ kleiner ist als ϱ.

Es sei nun in E_2 eine Orientierung (Umlaufsrichtung) und eine Ursprungsrichtung (Nullrichtung) festgelegt. Wir wählen die natürliche Zahl n so groß, daß $2\pi n^{-1} < 2^{-1}\theta$ gilt, und bezeichnen mit $\mathfrak{S}_{q+1}$, $q = 0, 1, \ldots, n-1$, den bis auf eine Translation bestimmten Sektor mit ϱ als Radius und mit $2\pi n^{-1}q$ bzw. $2\pi n^{-1}(q+1)$ als (orientiertem) Winkel seiner Schenkel mit der Ursprungsrichtung. Da $\mathfrak{A}$ der Sektorbedingung (S) genügen soll und da die Öffnung der Sektoren $\mathfrak{S}_i$ kleiner ist als $2^{-1}\theta$, $i = 1, \ldots, n$, gibt es in jedem Punkte P von $\mathfrak{A}$ einen, zu $(\mathfrak{A} - (P))$ fremden Sektor $\mathfrak{S}_i$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_i^{(j)}$ die Menge aller Punkte von $\mathfrak{A}^{(j)}$, welchen $\mathfrak{S}_i$ als leerer Sektor zugehört, so gilt nach dem eben Gesagten:

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{A}^{(j)} = \sum_i{}' \mathfrak{A}_i^{(j)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \sum_j \sum_i{}' \mathfrak{A}_i^{(j)},$$

wobei der Strich am Summenzeichen andeutet, daß diejenigen unter den $\mathfrak{A}^{(j)}$, welche leer sind, bei der Summation weggelassen werden. Die übrigbleibenden $\mathfrak{A}_i^{(j)}$ sind übrigens nicht notwendig paarweise fremd.

Wir betrachten nun irgendeine (nicht leere) $\mathfrak{A}_i^{(j)}$ (also j und i fest). Die Verbindungsgerade je zweier Punkte von $\mathfrak{A}_i^{(j)}$, deren Abstand ja kleiner ist als ϱ, bildet mit der Winkelhalbierenden Y_i des Sektors $\mathfrak{S}_i$ einen Winkel größer als $n^{-1}\pi$. Führen wir also ein Koordinatensystem mit Y_i als y-Achse ein, so wird $\mathfrak{A}_i^{(j)}$ dargestellt durch eine eindeutige Funktion $y = \varphi(x)$, wobei x eine beschränkte Zahlenmenge $\mathfrak{X}$ durchläuft ($a \leqq x \leqq b$) und wobei für zwei beliebige verschiedene Werte x_1, x_2 von $\mathfrak{X}$ die Lipschitzbedingung (L) gilt:

$$\text{(L)} \qquad |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < |x_2 - x_1| \operatorname{tg}(n^{-1}\pi).$$

Unter Berücksichtigung von (L) läßt sich nun $\varphi(x)$ zu einer im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ erklärten, eindeutigen, der Lipschitzbedingung (L) genügenden (stetigen) Funktion $f(x)$ erweitern[7]). Der durch $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, definierte Lipschitzbogen $\mathfrak{B}_i^{(j)}$ enthält also alle Punkte von $\mathfrak{A}_i^{(j)}$. Wegen (A) ist daher $\mathfrak{A} < \sum_j \sum_i{}' \mathfrak{B}_i^{(j)}$.

Wir bezeichnen nun die $\mathfrak{B}_i^{(j)}$ (in irgendeiner Reihenfolge) mit $\mathfrak{B}_{2\lambda+1}$, $\lambda = 0, \ldots, l_0$, und verbinden den Endpunkt von $\mathfrak{B}_{2\lambda-1}$ mit dem Anfangspunkt von $\mathfrak{B}_{2\lambda+1}$, $\lambda = 1, \ldots, l_0$, durch einen Lipschitzbogen, etwa eine Strecke $\mathfrak{B}_{2\lambda}$. Durch die hiermit erfolgende Aneinandersetzung der Lipschitzbogen $\mathfrak{B}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, 2l_0 + 1$, entsteht eine Kurve $\mathfrak{K} = \mathfrak{B}_1 + \cdots + \mathfrak{B}_{2l_0+1}$, welche rektifizierbar ist und die Menge $\mathfrak{A}$ trägt.

Anmerkung. Schließlich bemerken wir noch, daß die Sektorbedingung (S) schärfer ist als die Kontingentbedingung

(K) das Kontingent von $\mathfrak{A}$ in jedem Punkte von $\mathfrak{A}$ ist in einem Sektor mit einer Öffnung $\leqq 2\pi - \theta$ enthalten, wo $\theta > 0$ fest.

Beispiel. Der Bogen $y = x \sin(x^{-1})$ für $1 \geqq |x| > 0$ und $y = 0$ für $x = 0$ erfüllt (K) für $\theta = 2^{-1}\pi$, ist aber nicht rektifizierbar. Wir können (daher) kein Zahlenpaar (ϱ, θ) bestimmen, so daß die entsprechende Sektorbedingung (S) von diesem Bogen erfüllt wird.

---

[7]) Vgl. etwa Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung, Berlin 1938, II. Bd., S. 107—108.

Eingegangen 2. März 1942.

This material is restricted in use and cannot be quoted by title or abstract for propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited.

Oszillationstheoreme für die Eigenvektoren spezieller Matrizen.

Von *Alfred Stöhr* in Berlin.

1. Problemstellung. Wir betrachten eine reelle symmetrische Matrix von der Gestalt

$$\mathfrak{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} g_1(\lambda) & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_1 & g_2(\lambda) & k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & g_3(\lambda) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{N-1}(\lambda) & k_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{N-1} & g_N(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wo in der Hauptdiagonale monotone stetige Funktionen eines reellen Parameters λ stehen, die von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, wenn λ von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. In den der Hauptdiagonale benachbarten Parallelen stehen *positive* Konstanten $k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}$. Setzt man

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{pmatrix}, \tag{2}$$

so besitzt das lineare homogene Gleichungensystem

$$\mathfrak{M}(\lambda)\mathfrak{u} = 0 \tag{3}$$

(rechts steht der Nullvektor) nur für die speziellen durch

$$|\mathfrak{M}(\lambda)| = 0 \tag{4}$$

(die Striche $||$ bedeuten Determinantenbildung) definierten „Eigenwerte“ λ nichttriviale Lösungen, sogenannte „Eigenvektoren“ $\mathfrak{u}$. (Diese Definition der Eigenwerte und Eigenvektoren ist also etwas allgemeiner als die meist übliche Definition, die bei uns bis auf das Vorzeichen als Spezialfall: alle $g_n(\lambda) \equiv \lambda$ enthalten ist.)

Gegenstand unserer Untersuchung sind die Vorzeichen der Komponenten der Eigenvektoren. Wir werden unter anderem zeigen: Es gibt genau N reelle Eigenwerte, und diese sind paarweise verschieden. Ordnet man sie der Größe nach:

$$\lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \cdots < \lambda^{(N)}, \tag{5}$$

und gehört zum Eigenwert $\lambda^{(m)}$ der Eigenvektor

Reproduced and Distributed in the Public Interest by
THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN

$$\mathfrak{u}^{(m)} = \begin{pmatrix} u_1^{(m)} \\ u_2^{(m)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N^{(m)} \end{pmatrix} \qquad (1 \leqq m \leqq N), \tag{6}$$

so kommen auf der rechten Seite von (6) in der Vektorspalte genau $m-1$ Zeichenwechsel vor („erstes Oszillationstheorem"). Dabei wird wie üblich unter einem Zeichenwechsel verstanden, daß auf eine positive Zahl eine negative folgt oder umgekehrt; eventuelle Nullen sind bei der Bestimmung der Anzahl der Zeichenwechsel fortzulassen. Die Eigenvektoren (6) sind nur bis auf einen skalaren Faktor bestimmt; bei geeigneter Wahl der Eigenvektoren kann man erreichen, daß auch in den n-ten *Zeilen* der aus ihnen gebildeten Matrix

$$\begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(N)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & \cdots & u_2^{(N)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_N^{(1)} & u_N^{(2)} & \cdots & u_N^{(N)} \end{pmatrix}$$

je genau $n-1$ Zeichenwechsel vorkommen („zweites Oszillationstheorem").

2. Ein Beispiel. Setzt man $k_1 = k_2 = \cdots = k_{N-1} = 1, g_1(\lambda) \equiv g_2(\lambda) \equiv \cdots \equiv g_N(\lambda) \equiv \lambda$, so erhält man die Eigenwerte

$$\lambda^{(m)} = -2\cos\frac{\pi m}{N+1} \qquad (1 \leqq m \leqq N),$$

und die Komponenten der zugehörigen Eigenvektoren (6) werden durch

$$u_n^{(m)} = \sin\frac{\pi m n}{N+1} \qquad (1 \leqq n \leqq N)$$

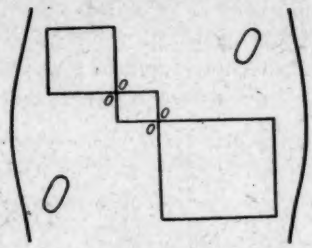
gegeben. Diese Behauptungen lassen sich durch elementare trigonometrische Rechnung verifizieren.

3. Anordnung der Beweise. Nach dem einleitenden Kapitel (Nr. 1—4) werden in Nr. 5—7 einige Hilfssätze gebracht. Die dann folgenden drei Schlußkapitel (Nr. 8, Nr. 9—11, Nr. 12, 13) sind voneinander unabhängig. Nr. 8 bringt einen Beweis des ersten Oszillationstheorems unter Benutzung des Trägheitsgesetzes quadratischer Formen. Nr. 9—11 bringt einen zweiten (längeren) Beweis des ersten Oszillationstheorems und noch einen weiteren Satz (Satz 12) über die Vorzeichenverteilung in den Spalten (6). Die Beweise dieses Kapitels sind denen entsprechender Lehrsätze über die Lösungen Sturm-Liouvillescher Randwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung[1]) nachgebildet. Man kann nämlich das Gleichungensystem (3) als ein System von linearen homogenen Rekursionsformeln zweiter Ordnung für die Komponenten eines Eigenvektors auffassen, und zwischen diesen Rekursionsformeln („Differenzengleichungen") und den Differentialgleichungen besteht eine gewisse Analogie. Diese Analogie soll auch in der Bezeichnung unserer Sätze als „Oszillationstheoreme" zum Ausdruck kommen. Endlich erfolgt in Nr. 12, 13 der Beweis des zweiten Oszillationstheorems

4. Verallgemeinerungen. Der Fall, daß nicht alle k_n positiv sind, läßt sich auf den Fall positiver k_n zurückführen. Sind nämlich einige k_n Null, so zerfällt die Matrix

[1]) Eine kurze Darstellung s. in G. Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sammlung Göschen.

nach dem Schema



in kleinere Kästchen, die einzeln untersucht werden können und in denen keine k_n mehr verschwinden. Sei nun bereits (1) ein derartiges Kästchen mit nicht notwendig positiven k_n und

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_N \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix mit nichtverschwindender Determinante. Dann führt die Transformation

$$\mathfrak{M}(\lambda) \to \mathfrak{D}\mathfrak{M}(\lambda)\mathfrak{D}$$

die Matrix $\mathfrak{M}(\lambda)$ in eine Matrix gleicher Bauart über, wobei die $g_n(\lambda)$ mit dem positiven Faktor d_n^2 multipliziert sind ($1 \leqq n \leqq N$), während die k_n durch $d_n d_{n+1} k_n$ ersetzt sind ($1 \leqq n \leqq N-1$). Durch passende Wahl der d_n läßt sich nun etwa $d_n d_{n+1} k_n = 1$ für $1 \leqq n \leqq N-1$ erreichen (man setze etwa $d_1 = 1$ und bestimme dann $d_2, d_3, \ldots, d_N$ der Reihe nach). Da aus $\mathfrak{M}(\lambda)\,\mathfrak{u} = 0$ die Gleichung $\mathfrak{D}\mathfrak{M}(\lambda)\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{u} = 0$ folgt, stimmen die Komponenten der Eigenvektoren von $\mathfrak{M}(\lambda)$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{M}(\lambda)\mathfrak{D}$ bis auf Faktoren mit leicht übersehbaren Vorzeichen überein. Gleichzeitig hat sich gezeigt, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k_1 = k_2 = \cdots = k_{N-1} = 1$ annehmen dürften; wir machen aber keinen Gebrauch davon.

Wir erwähnen noch kurz, daß man unter geeigneten Zusatzbedingungen versuchen kann, die angekündigten Sätze auf unendliche Matrizen zu übertragen, gehen jedoch nicht weiter darauf ein.

Für alles folgende setzen wir voraus, daß $\mathfrak{M}(\lambda)$ eine Matrix von der in Nr. 1 beschriebenen Art ist.

5. Die Eigenwerte. $\mu_1(\lambda), \mu_2(\lambda), \ldots, \mu_N(\lambda)$ seien die Nullstellen von

$$|\mathfrak{M}(\lambda) - \mu\mathfrak{E}| = 0. \tag{7}$$

$\mathfrak{E}$ ist dabei die Einheitsmatrix. Alle $\mu_m(\lambda)$ sind bekanntlich reell und hängen stetig von λ ab ($1 \leqq m \leqq N$).

Satz 1. *Die $\mu_m(\lambda)$ sind für jeden festen Wert von λ paarweise verschieden.*

Beweis. Wir betrachten in den Bezeichnungen (2) das lineare homogene Gleichungensystem

$$(\mathfrak{M}(\lambda) - \mu_m(\lambda)\mathfrak{E})\mathfrak{u} = 0. \tag{8}$$

Setzt man

$$u_0 = u_{N+1} = 0, \tag{9}$$

$$k_0 \text{ und } k_n \text{ beliebig positiv} \tag{10}$$

(die Größen (10) treten nur mit u_0 oder u_{N+1} als Faktor auf), so lautet (8) in Komponenten geschrieben

$$k_{n-1}u_{n-1} + (g_n(\lambda) - \mu_m(\lambda))u_n + k_n u_{n+1} = 0 \qquad (1 \leqq n \leqq N). \tag{11}$$

Aus (11) folgt, daß nach willkürlicher Wahl von u_1 die übrigen Komponenten $u_2, u_3, \ldots, u_N$ rekursiv und eindeutig berechnet werden können. Zu jedem $\mu_m(\lambda)$ gibt es also nur *einen* linear unabhängigen Eigenvektor u, woraus die behauptete Verschiedenheit der $\mu_m(\lambda)$ folgt.

Auf Grund von Satz 1 kann man die stetigen Funktionen $\mu_1(\lambda), \mu_2(\lambda), \ldots, \mu_N(\lambda)$ so numerieren, daß für alle λ

$$\mu_1(\lambda) > \mu_2(\lambda) > \cdots > \mu_N(\lambda) \tag{12}$$

ist.

Satz 2. *Die $\mu_m(\lambda)$ sind monoton wachsende Funktionen von λ.*

Beweis. Folgt aus der vorausgesetzten Monotonie der $g_n(\lambda)$, denn nach einem allgemeinen Satz[2]) wachsen die Lösungen von (7), wenn man zu der Matrix $\mathfrak{M}(\lambda)$ eine solche Matrix addiert, deren zugehörige quadratische Form positiv definit ist.

Satz 3. *Die Gleichung* (4) *hat genau N reelle, paarweise verschiedene Lösungen* (5).

Beweis. Für sehr kleine (d. h. stark negative) λ sind wegen des dann stattfindenden Überwiegens der Hauptdiagonale von $\mathfrak{M}(\lambda)$ die Größen (12) sämtlich negativ, für sehr große λ sind dagegen die Größen (12) sämtlich positiv. Wegen der Stetigkeit und Monotonie der $\mu_m(\lambda)$ besitzt jedes $\mu_m(\lambda)$ genau eine Nullstelle $\lambda^{(m)}$. Aus (12) folgt, daß diese $\lambda^{(m)}$ die Ungleichung (5) erfüllen, und aus (7) folgt, daß alle λ_m, aber keine weiteren reellen Zahlen Lösungen von (4) sind.

Satz 4. *Zu jedem Eigenwert $\lambda^{(m)}$ der Matrix $\mathfrak{M}(\lambda)$ gibt es genau einen linear unabhängigen Eigenvektor* (6) *mit*

$$\mathfrak{M}(\lambda^{(m)})\mathfrak{u}^{(m)} = 0, \tag{13}$$

und für die erste und letzte Komponente jedes Eigenvektors gilt

$$u_1^{(m)} \neq 0, \tag{14}$$

$$u_N^{(m)} \neq 0. \tag{15}$$

Beweis. Mit den Festsetzungen

$$u_0^{(m)} = 0, \; u_{N+1}^{(m)} = 0 \tag{16}$$

und (10) lautet (13) in Komponenten geschrieben

$$k_{n-1}u_{n-1}^{(m)} + g_n(\lambda^{(m)})u_n^{(m)} + k_n u_{n+1}^{(m)} = 0 \qquad (1 \leqq n \leqq N). \tag{17}$$

Aus (17) folgt, daß nach willkürlicher Wahl von $u_1^{(m)}$ die übrigen Komponenten $u_2^{(m)}, u_3^{(m)}, \ldots, u_N^{(m)}$ rekursiv und eindeutig berechnet werden können. Die Annahme $u_1^{(m)} = 0$ zieht dabei das Verschwinden des Vektors (6) nach sich; das gleiche gilt von der Annahme $u_N^{(m)} = 0$.

6. Unterdeterminanten. Die Betrachtungen dieser Nr. 6 werden nur beim Beweis des zweiten Oszillationstheorems benutzt.

Für $1 \leqq n \leqq N$ setzen wir

$$\mathfrak{M}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} g_1(\lambda) & k_1 & & & \\ k_1 & g_2(\lambda) & k_2 & & \\ & k_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & k_{n-1} \\ & & & k_{n-1} & g_n(\lambda) \end{pmatrix} \tag{18}$$

[2]) Vgl. Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik I, 2. Aufl., S. 28.

(also $\mathfrak{M}_N(\lambda) = \mathfrak{M}(\lambda)$),

$$D_n(\lambda) = |\mathfrak{M}_n(\lambda)|. \tag{19}$$

Ferner sei für alle λ

$$D_0(\lambda) = 1. \tag{20}$$

Satz 5. *$D_n(\lambda)$ ist für $0 \leqq n \leqq N$ eine stetige Funktion von λ, hat genau n reelle Nullstellen und wechselt an jeder Nullstelle das Vorzeichen.*

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist klar. Für $n \geqq 1$ ist zunächst die Stetigkeit klar. Der als Funktion von μ zu betrachtende Ausdruck

$$D_n(\lambda, \mu) = |\mathfrak{M}_n(\lambda) - \mu \mathfrak{E}_n| \tag{21}$$

($\mathfrak{E}_n$ = Einheitsmatrix n-ten Grades) hat nach Satz 1 (mit n statt N) genau n reelle Nullstellen, die alle einfach sind, an denen also $D_n(\lambda, \mu)$ sein Vorzeichen wechselt. Die Stetigkeit von $D_n(\lambda, \mu)$ und die Monotonie der durch $D_n(\lambda, \mu) = 0$ implizit definierten Funktion (vgl. Satz 2) ergibt nun die Behauptung.

Satz 6. *Sei $N > 1$. Sind* (5) *die Nullstellen von $D_N(\lambda)$ und*

$$\lambda^{*(1)} < \lambda^{*(2)} < \cdots < \lambda^{*(N-1)} \tag{22}$$

die Nullstellen von $D_{N-1}(\lambda)$, so ist

$$\lambda^{(1)} \leqq \lambda^{*(1)} \leqq \lambda^{(2)} \leqq \lambda^{*(2)} \leqq \cdots \leqq \lambda^{*(N-1)} \leqq \lambda^{(N)}. \tag{23}$$

Beweis. Sind (12) bei festem λ die Nullstellen von $D_N(\lambda, \mu)$ und

$$\mu_1^*(\lambda) > \mu_2^*(\lambda) > \cdots > \mu_{N-1}^*(\lambda)$$

die Nullstellen von $D_{N-1}(\lambda, \mu)$, so ist[3])

$$\mu_1(\lambda) \geqq \mu_1^*(\lambda) \geqq \mu_2(\lambda) \geqq \mu_2^*(\lambda) \geqq \cdots \geqq \mu_{N-1}(\lambda) \geqq \mu_N(\lambda).$$

Die beim Beweis von Satz 5 angewandte Schlußweise ergibt nun die Behauptung (23).

7. Nullstellen einer Zahlenfolge. Wir nennen n eine *Nullstelle* der Folge

$$\ldots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \ldots, \tag{24}$$

wenn $u_n = 0$ ist. Wir nennen n eine *innere Stelle* der Folge, wenn u_{n-1} und u_{n+1} zur Folge gehören. Eine innere Nullstelle n heiße *simpel*, wenn

$$u_{n-1}\, u_{n+1} < 0 \tag{25}$$

ist. Wir sprechen von einer identisch verschwindenden Folge, wenn alle Elemente der Folge Null sind.

Satz 7. *Wenn eine nicht identisch verschwindende Folge* (24), *die einer Rekursionsformel*

$$k_{n-1}\, u_{n-1} + g_n(\lambda) u_n + k_n u_{n+1} = 0 \tag{26}$$

genügt, überhaupt innere Nullstellen besitzt, so sind dies simple Nullstellen.

Beweis. Da die k_{n-1}, k_n als positiv vorausgesetzt waren, folgt aus (26) und $u_n = 0$ entweder (25) oder $u_{n-1} = u_{n+1} = 0$; das letztere zieht jedoch, wie man induktiv schließt, das identische Verschwinden der gesamten Folge nach sich.

Satz 8. *Wenn die aus den Komponenten eines Eigenvektors* (6) *gebildete Folge*

$$u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, \ldots, u_N^{(m)} \tag{27}$$

Nullstellen besitzt, so sind dies innere simple Nullstellen.

Beweis. Nach (14), (15) können höchstens innere Nullstellen auftreten. Da die Folge (27) der Rekursionsformel (17) genügt, sind diese Nullstellen nach Satz 7 simpel.

---

[3]) Vgl. a. a. O. [2]).

8. Das erste Oszillationstheorem. Es lautet

Satz 9. *Die Folge* (27) *besitzt genau* $m-1$ *Zeichenwechsel* ($1 \leqq m \leqq N$; der Begriff „Zeichenwechsel" ist in Nr. 1 erklärt).

Beweis.

$$\mathfrak{M}(\lambda; v_1, v_2, \ldots, v_N) = \sum_{n=1}^{N} g_n(\lambda) v_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} k_n v_n v_{n+1} \tag{28}$$

sei die mit der Matrix (1) gebildete quadratische Form. In den Bezeichnungen von Nr. 5 ist bekanntlich

$$\mathfrak{M}(\lambda; v_1, v_2, \ldots, v_N) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n(\lambda) v_n^{*2}, \tag{29}$$

wo die v_n^* durch eine reelle orthogonale Hauptachsentransformation aus den v_n hervorgehen. Setzt man in (29) speziell λ gleich dem m-ten Eigenwert $\lambda^{(m)}$ (vgl. (5)), so folgt aus den Betrachtungen von Nr. 5, daß auf der rechten Seite von (29) genau $m-1$ positive Koeffizienten (nämlich $\mu_1(\lambda^{(m)}), \mu_2(\lambda^{(m)}), \ldots, \mu_{m-1}(\lambda^{(m)})$ und genau $N-m$ negative Koeffizienten (nämlich $\mu_{m+1}(\lambda^{(m)}), \mu_{m+2}(\lambda^{(m)}), \ldots, \mu_N(\lambda^{(m)})$) auftreten; insgesamt also genau $N-1$ nicht verschwindende Koeffizienten. Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen ergibt nun: Wenn man

$$\mathfrak{M}(\lambda^{(m)}; v_0, v_2, \ldots, v_N) \tag{30}$$

irgendwie reell und linear auf eine Linearkombination von $N-1$ Quadraten transformiert, so befinden sich unter den Koeffizienten der Quadrate genau $m-1$ positive Koeffizienten. Das erste Oszillationstheorem wird daher bewiesen sein, wenn wir (3) so in eine Summe von $N-1$ Quadraten transformieren können, daß dabei genau so viele positive Koeffizienten auftreten wie Zeichenwechsel in der Folge (27) vorhanden sind; und das wird geschehen.

Wir machen zunächst die spezielle Annahme, daß alle Komponenten $u_n^{(m)}$ des zum Eigenwert $\lambda^{(m)}$ gehörigen Eigenvektors (6), d. h. alle Glieder der Folge (27), von Null verschieden sind. Wir setzen wieder (16) und (10) fest. Aus (17) folgt nun

$$g_n(\lambda^{(m)}) = -k_{n-1}\frac{u_{n-1}^{(m)}}{u_n^{(m)}} - k_n \frac{u_{n+1}^{(m)}}{u_n^{(m)}}. \tag{31}$$

Setzt man in (28) $\lambda = \lambda^{(m)}$ und setzt dann (31) ein, so erhält man (leere Summen bedeuten 0)

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(\lambda^{(m)}; v_1, v_2, \ldots, v_N) &= \sum_{n=1}^{N} g_n(\lambda^{(m)}) v_n^2 + 2\sum_{n=1}^{N-1} k_n v_n v_{n+1} \\ &= -\sum_{n=1}^{N} k_{n-1}\frac{u_{n-1}^{(m)}}{u_n^{(m)}} v_n^2 - \sum_{n=1}^{N} k_n \frac{u_{n+1}^{(m)}}{u_n^{(m)}} v_n^2 + 2\sum_{n=1}^{N-1} k_n v_n v_{n+1} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{N-1} k_n \frac{u_n^{(m)}}{u_{n+1}^{(m)}} v_{n+1}^2 - \sum_{n=1}^{N-1} k_n \frac{u_{n+1}^{(m)}}{u_n^{(m)}} + 2\sum_{n=1}^{N-1} k_n v_n v_{n+1} \\ &\qquad \text{(hier wurde (16) benutzt)} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} -k_n \frac{u_n^{(m)}}{u_{n+1}^{(m)}} \left(v_{n+1} - \frac{u_{n+1}^{(m)}}{u_n^{(m)}} v_n\right)^2.\end{aligned} \tag{32}$$

Der Koeffizient $-k_n \dfrac{u_n^{(m)}}{u_{n+1}^{(m)}}$ ist genau dann positiv, wenn zwischen $u_n^{(m)}$ und $u_{n+1}^{(m)}$ ein Zeichenwechsel stattfindet. Damit ist in unserem Spezialfall alles bewiesen.

Sind nicht alle $u_n^{(m)}$ von Null verschieden, so beachten wir, daß nach Satz 8 aus $u_{n^*}^{(m)} = 0$ mit $1 \leqq n^* \leqq N$ die Aussagen $2 \leqq n^* \leqq N-1$, $u_{n^*-1}^{(m)} u_{n^*+1}^{(m)} < 0$ folgen;

d. h. zwischen $u_{n^*-1}^{(m)}$ und $u_{n^*+1}^{(m)}$ findet ein Zeichenwechsel statt. Sei nun

$$1 < n^* < n^{**} < \cdots < N,$$

wo $n^*, n^{**}, \ldots$ alle diejenigen zwischen 1 und N gelegenen Indizes n sind, für die $u_n^{(m)}$ verschwindet. Wir spalten dann (30) auf:

$$\begin{aligned}(33)\qquad \mathfrak{M}(\lambda^{(m)};\, v_1, v_2, \ldots, v_N) &= \sum_{n=1}^{N} g_n(\lambda^{(m)}) v_n^2 + 2\sum_{n=1}^{N-1} k_n v_n v_{n+1} \\ &= \mathfrak{M}[1, n^*-1] + \mathfrak{M}[n^*] + \mathfrak{M}[n^*+1, n^{**}-1] + \mathfrak{M}[n^{**}] + \cdots,\end{aligned}$$

wobei

$$(34)\qquad \mathfrak{M}[p, q] = \sum_{n=p}^{q} g_n(\lambda^{(m)})\, v_n^2 + 2\sum_{n=p}^{q-1} k_n v_n v_{n+1},$$

$$(35)\qquad \mathfrak{M}[q] = g_q(\lambda^{(m)})\, v_q^2 + 2k_{q-1} v_{q-1} v_q + 2k_q v_q v_{q+1}$$

gesetzt wurde. Die Ausdrücke (34) lassen sich nun nach dem Muster von (32) als Linearkombinationen von Quadraten darstellen; an die Stelle von (16) treten dabei die Voraussetzungen $u_{p-1}^{(m)} = u_{q+1}^{(m)} = 0$, d. h.

$$u_0^{(m)} = u_{n^*}^{(m)} = u_{n^{**}}^{(m)} = \cdots = u_{N+1}^{(m)} = 0.$$

Die Ausdrücke (35) sind Differenzen von Quadraten, nämlich

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}[q] = {} & (k_{q-1} v_{q-1} + \tfrac{1}{2}(g_q(\lambda^{(m)}) + 1) v_q + k_q v_{q+1})^2 \\ & - (k_{q-1} v_{q-1} + \tfrac{1}{2}(g_q(\lambda^{(m)}) - 1) v_q + k_q v_{q+1})^2.\end{aligned}$$

Setzt man alle diese Linearkombinationen von Quadraten auf der rechten Seite von (33) ein, so erhält man eine Darstellung von $\mathfrak{M}(\lambda^{(m)};\, v_1, v_2, \ldots, v_N)$ als Linearkombination von $N-1$ Quadraten, wobei genau so viele positive Koeffizienten auftreten wie Zeichenwechsel in der Folge (27) vorhanden sind; damit ist alles bewiesen.

9. Eine Identität. Wir betrachten gleichzeitig zwei Rekursionsformeln der Gestalt (17), die wir folgendermaßen schreiben:

$$(36)\qquad \begin{cases} k_{n-1} u_{n-1}^{(a)} + k_n u_{n+1}^{(a)} = -g_n(\lambda^{(a)})\, u_n^{(a)}, \\ k_{n-1} u_{n-1}^{(b)} + k_n u_{n+1}^{(b)} = -g_n(\lambda^{(b)})\, u_n^{(b)}. \end{cases}$$

Multipliziert man die erste der Gleichungen (36) mit $u_n^{(b)}$, die zweite mit $u_n^{(a)}$ und subtrahiert, so erhält man nach leichter Umformung

$$k_{n-1}\begin{vmatrix} u_{n-1}^{(a)} & u_n^{(a)} \\ u_{n-1}^{(b)} & u_n^{(b)} \end{vmatrix} - k_n \begin{vmatrix} u_n^{(a)} & u_{n+1}^{(a)} \\ u_n^{(b)} & u_{n+1}^{(b)} \end{vmatrix} = (g_n(\lambda^{(b)}) - g_n(\lambda^{(a)})) u_n^{(a)} u_n^{(b)}$$

und daraus durch Summation

$$(37)\qquad k_{r-1}\begin{vmatrix} u_{r-1}^{(a)} & u_r^{(a)} \\ u_{r-1}^{(b)} & u_r^{(b)} \end{vmatrix} - k_s \begin{vmatrix} u_s^{(a)} & u_{s+1}^{(a)} \\ u_s^{(b)} & u_{s+1}^{(b)} \end{vmatrix} = \sum_{n=r}^{s} (g_n(\lambda^{(b)}) - g_n(\lambda^{(a)})) u_n^{(a)} u_n^{(b)}.$$

10. Die Interpolationsfunktion. Jeder Folge (24) ordnen wir eine „Interpolationsfunktion" $u(\nu)$ dadurch zu, daß für ganzzahlige ν

$$(38)\qquad u(\nu) = u_\nu$$

gesetzt wird. Für die Zwischenwerte ν, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden, dem Definitionsbereich von (38) angehörenden ganzen Zahlen liegen, definieren wir $u(\nu)$ durch lineare Interpolation. Wir sprechen von einer Nullstelle ν der Interpolationsfunktion, wenn $u(\nu) = 0$ ist; die Nullstelle heißt innere Nullstelle, wenn sie nicht am Rande des Definitionsbereiches der Interpolationsfunktion liegt.

Satz 10. *Hat eine Folge im Inneren höchstens simple Nullstellen, so besteht zwischen ihren Zeichenwechseln und den inneren Nullstellen ihrer Interpolationsfunktion folgende*

eineindeutige Zuordnung: (a) *Zwischen je zwei Indizes der Folge, zwischen denen ein Zeichenwechsel stattfindet (also zwischen* $n-1$ *und* n, *falls* $u_{n-1}u_n < 0$, *oder zwischen* $n-1$ *und* $n+1$, *falls* $u_{n-1}u_{n+1} < 0, u_n = 0$) *liegt genau eine Nullstelle der Interpolationsfunktion.* (b) *Ist* ν *eine innere Nullstelle der Interpolationsfunktion und sind* p, q *die ganzen Zahlen mit*

$$\nu - 1 \leqq p < \nu < q \leqq \nu + 1,$$

so gehören u_p *und* u_q *der Folge an, und zwischen* p *und* q *findet (in dem unter* (a) *erklärten Sinne) genau ein Zeichenwechsel der Folge statt.*

Beweis. Klar.

Satz 11. *Zwei nicht identisch verschwindende, für die gleichen Indizes definierte Folgen*

$$\ldots, u_{n-1}^{(a)}, u_n^{(a)}, u_{n+1}^{(a)}, \ldots, \tag{39}$$

$$\ldots, u_{n-1}^{(b)}, u_n^{(b)}, u_{n+1}^{(b)}, \ldots \tag{40}$$

(a, b *ganz,* $\geqq 1$ *und* $\leqq N$) *mögen den Rekursionsformeln* (36) *genügen. Es sei* $a < b$, *also* $\lambda^{(a)} < \lambda^{(b)}$ *nach* (5) *und*

$$g_n(\lambda^{(a)}) < g_n(\lambda^{(b)}) \tag{41}$$

wegen der in Nr. 1 *vorausgesetzten Monotonie der Funktionen* $g_n(\lambda)$. *Es seien* ϱ *und* σ *zwei aufeinanderfolgende Nullstellen der Interpolationsfunktion* $u^a(\nu)$ *der Folge* (39). *Dann besitzt die Interpolationsfunktion* $u^{(b)}(\nu)$ *der Folge* (40) *mindestens eine Nullstelle* τ *mit* $\varrho < \tau < \sigma$.

Beweis. Angenommen, es gäbe keine derartige Nullstelle τ. Dann wechselt für die ν mit

$$\varrho < \nu < \sigma \tag{42}$$

weder $u^{(a)}(\nu)$ noch $u^{(b)}(\nu)$ sein Vorzeichen, denn die Interpolationsfunktionen sind stetig. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß das Vorzeichen im Intervall (42) für beide Interpolationsfunktionen positiv ist, denn andernfalls multipliziere man die betr. Interpolationsfunktion und die zugehörige Folge mit -1; das beeinflußt weder die Nullstellen noch die Zuordnung der Interpolationsfunktion zur Folge noch die Gültigkeit der Rekursionsformeln. r und s seien die ganzen Zahlen mit

$$r - 1 \leqq \varrho < r, \; s < \sigma \leqq s + 1.$$

Auf Grund unserer Voraussetzungen ist

$$u_r^{(a)} > 0, \; u_{r-1}^{(a)} \leqq 0, \; u_r^{(b)} > 0. \tag{43}$$

Für $r - 1 \leqq \nu \leqq r$ lauten die Interpolationsfunktionen

$$u^{(a)}(\nu) = u_r^{(a)} - (r - \nu)(u_r^{(a)} - u_{r-1}^{(a)}), \tag{44}$$

$$u^{(b)}(\nu) = u_r^{(b)} - (r - \nu)(u_r^{(b)} - u_{r-1}^{(b)}). \tag{45}$$

Aus unseren Voraussetzungen folgt, daß an der Nullstelle

$$\varrho = r - \frac{u_r^{(a)}}{u_r^{(a)} - u_{r-1}^{(a)}}$$

von (44) die Funktion (45) nicht negativ ist; das gibt wegen (43) nach einigen Umformungen die Bedingung

$$\begin{vmatrix} u_{r-1}^{(a)} & u_r^{(a)} \\ u_{r-1}^{(b)} & u_r^{(b)} \end{vmatrix} \leqq 0. \tag{46}$$

Durch eine entsprechende Überlegung erhält man

$$\begin{vmatrix} u_s^{(a)} & u_{s+1}^{(a)} \\ u_s^{(b)} & u_{s+1}^{(b)} \end{vmatrix} \geqq 0. \tag{47}$$

Führt man (46), (47) in (37) ein, so wird die linke Seite von (37) nicht positiv. Auf der rechten Seite steht dagegen eine Summe, in der nach (41) alle Summanden positiv sind. Die Summe ist nicht leer, denn aus Satz 10 folgt, daß zwischen den Nullstellen ϱ und σ mindestens eine ganze Zahl liegt und daher $r \leqq s$ ist. Damit ist ein Widerspruch hergestellt.

11. Die Zeichenwechsel in den Eigenvektoren. $\lambda^{(a)}$ und $\lambda^{(b)}$ seien Eigenwerte,

$$u_0^{(a)} = 0, u_1^{(a)}, u_2^{(a)}, \ldots, u_N^{(a)}, u_{N+1}^{(a)} = 0, \tag{48}$$

$$u_0^{(b)} = 0, u_1^{(b)}, u_2^{(b)}, \ldots, u_N^{(b)}, u_{N+1}^{(b)} = 0 \tag{49}$$

seien nichttriviale Lösungen der zugehörigen Rekursionsformeln (mit anderen Worten:

$$\mathfrak{u}^{(a)} = \begin{pmatrix} u_1^{(a)} \\ u_2^{(a)} \\ \vdots \\ u_N^{(a)} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{u}^{(b)} = \begin{pmatrix} u_1^{(b)} \\ u_2^{(b)} \\ \vdots \\ u_N^{(b)} \end{pmatrix}$$

seien zu $\lambda^{(a)}$, $\lambda^{(b)}$ gehörige Eigenvektoren). Für $0 \leqq r < s \leqq N+1$ sei $z^{(a)}(r, s)$ die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge

$$u_r^{(a)}, u_{r+1}^{(a)}, \ldots, u_s^{(a)}, \tag{50}$$

und $z^{(b)}(r, s)$ sei die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge

$$u_r^{(b)}, u_{r+1}^{(b)}, \ldots, u_s^{(b)}. \tag{51}$$

Ferner sei

$$\varepsilon^{(a)}(n) = \begin{cases} 1 \text{ für } u_n^{(a)} = 0, \\ 0 \text{ für } u_n^{(a)} \neq 0. \end{cases}$$

Mit diesen Bezeichungen gilt

Satz 12. *Ist* $1 \leqq a < b \leqq N$, *so ist*

$$z^{(a)}(r, s) + \varepsilon^{(a)}(r) + \varepsilon^{(a)}(s) - 1 \leqq z^{(b)}(r, s). \tag{52}$$

Vorbemerkung. Dieser Satz ist nicht im ersten Oszillationstheorem enthalten, da er nicht nur über die Anzahl, sondern auch über die Lage der Zeichenwechsel etwas aussagt.

Beweis. Nach Satz 10 kann man $z^{(a)}(r, s)$ und $z^{(b)}(r, s)$ als die Anzahlen der inneren Nullstellen der zu (50), (51) gehörigen Interpolationsfunktionen deuten. Bei dieser Auffassung erscheint (52) als Folge von Satz 11.

Zweiter Beweis des ersten Oszillationstheorems (Wortlaut s. Satz 9). Die Anzahl der Zeichenwechsel der Folge (27) ist in unserer neuen Bezeichnung $z^{(m)}(1, N)$. Fügt man zu der Folge (27) noch die Elemente (16) hinzu, so wird die Anzahl der Zeichenwechsel nicht geändert, also

$$z^{(m)}(0, N+1) = z^{(m)}(1, N). \tag{53}$$

Satz 12 ergibt für $1 \leqq a < b \leqq N$

$$z^{(a)}(0, N+1) + 1 \leqq z^{(b)}(0, N+1), \tag{54}$$

da wegen (16) $\varepsilon^{(a)}(0) = \varepsilon^{(a)}(N+1) = 1$ ist. Aus (53), (54) folgt

$$z^{(a)}(1, N) + 1 \leqq z^{(b)}(1, N),$$

also speziell

$$(55) \qquad \begin{cases} z^{(1)}(1, N) + 1 \leqq z^{(2)}(1, N), \\ z^{(2)}(1, N) + 1 \leqq z^{(3)}(1, N), \\ \vdots \\ z^{(N-1)}(1, N) + 1 \leqq z^{(N)}(1, N). \end{cases}$$

Aus der Bedeutung von $z^{(m)}(1, N)$ als Anzahl der Zeichenwechsel der aus N Elementen bestehenden Folge ergibt sich

$$0 \leqq z^{(m)}(1, N) \leqq N - 1,$$

also speziell

$$(56) \qquad \begin{cases} 0 \leqq z^{(1)}(1, N), \\ z^{(N)}(1, N) \leqq N - 1. \end{cases}$$

Ein Vergleich von (55) mit (56) zeigt nun, daß in (55) und (56) überall Gleichheit gelten muß; es ist also

$$z^{(m)}(1, N) = m - 1,$$

wie behauptet.

12. Allgemeine Betrachtungen über Vorzeichenfolgen. Ist $\mathfrak{f}$ eine Folge reeller Zahlen, so bezeichnen wir als die zugehörige *Vorzeichenfolge* $\tilde{\mathfrak{f}}$ diejenige Folge von Symbolen $+$, $-$, 0, die man aus $\mathfrak{f}$ dadurch erhält, daß man jedes Element von $\mathfrak{f}$ durch sein Vorzeichen ersetzt; das Zeichen $\sim$ über einem Buchstaben hat im folgenden stets diese Bedeutung. In dieser Nr. 12 ist nur von nichtleeren endlichen Vorzeichenfolgen die Rede. Als *Länge* $l(\tilde{\mathfrak{f}})$ der Vorzeichenfolge $\tilde{\mathfrak{f}}$ bezeichnen wir die um 1 verminderte Anzahl der Elemente von $\tilde{\mathfrak{f}}$. Als *Teilfolge* $\tilde{\mathfrak{g}}$ einer Vorzeichenfolge $\tilde{\mathfrak{f}}$ bezeichnen wir nur solche Vorzeichenfolgen $\tilde{\mathfrak{g}}$, die aus einigen lückenlos aufeinanderfolgenden Elementen von $\tilde{\mathfrak{f}}$ bestehen; Schreibweise $\tilde{\mathfrak{g}} \leqq \tilde{\mathfrak{f}}$. Eine Folge kann in einer anderen Folge auch mehrfach als Teilfolge enthalten sein.

Beispiel. $+ - + - 0 + -$ enthält $+ -$ dreimal als Teilfolge, $- +$ einmal als Teilfolge und $+ + -$ nicht als Teilfolge.

Unter einer zu $\tilde{\mathfrak{f}}$ gehörigen *Elementarfolge* verstehen wir eine Vorzeichenfolge $\tilde{\mathfrak{e}}$ mit folgenden drei Eigenschaften:

Teileigenschaft. $\tilde{\mathfrak{e}} \leqq \tilde{\mathfrak{f}}$.

Struktureigenschaft. Über das erste und das letzte Glied von $\tilde{\mathfrak{e}}$ wird nichts gefordert; alle vielleicht vorhandenen übrigen Glieder von $\tilde{\mathfrak{e}}$ sind 0.

Maximaleigenschaft. Wenn ein $\tilde{\mathfrak{e}}'$ mit $\tilde{\mathfrak{e}} \leqq \tilde{\mathfrak{e}}'$ ebenfalls die Teileigenschaft und die Struktureigenschaft besitzt, so ist $\tilde{\mathfrak{e}}' = \tilde{\mathfrak{e}}$.

Beispiel. $+ - + - 0 + -$ besitzt genau die folgenden fünf Elementarfolgen: $+ -$ dreimal, $- +$ und $- 0 +$ je einmal.

Die Betrachtung der Elementarfolgen wird sich bei der Untersuchung der Zeichenwechsel als zweckmäßig erweisen.

Satz 13. *Jedes Element von $\tilde{\mathfrak{f}}$ gehört mindestens einer und höchstens zwei Elementarfolgen von $\tilde{\mathfrak{f}}$ an. Je zwei verschiedene Elementarfolgen von haben höchstens ein Element*

gemeinsam. Dies gemeinsame Element ist dann von Null verschieden und ist erstes Element der einen und letztes Element der anderen Elementarfolge.

Beweis. Klar.

Satz 14. *Es ist*

$$l(\tilde{\mathfrak{f}}) = \sum_{\tilde{\mathfrak{e}} \leqq \tilde{\mathfrak{f}}} l(\tilde{\mathfrak{e}}),$$

wo über alle in $\tilde{\mathfrak{f}}$ *enthaltenen Elementarfolgen* $\tilde{\mathfrak{e}}$ *in der richtigen Vielfachheit summiert wird.*

Beweis. Folgt aus Satz 13.

Wir teilen die Elementarfolgen in neun Klassen ein, indem wir zu jeder Klasse die darin enthaltenen Elementarfolgen angeben.

Klasse I. $+$ und $-$,

Klasse II. $++$ und $--$,

Klasse III. $+-$ und $-+$,

Klasse IV. $+0-$ und $-0+$,

Klasse V. $+0+$ und $-0-$,

Klasse VI. $+0\cdots0+$ und $+0\cdots0-$ und $-0\cdots0+$ und $-0\cdots0-$ (Anfang und Ende von Null verschieden; dazwischen mindestens zwei Nullen),

Klasse VII. $0\cdots0+$ und $0\cdots0-$ (am Anfang mindestens eine Null, am Ende keine Null),

Klasse VIII. $+0\cdots0$ und $-0\cdots0$ (am Anfang keine Null, am Ende mindestens eine Null),

Klasse IX. $0\cdots0$ (mindestens eine Null).

Wegen der Struktureigenschaft gehört jede Elementarfolge einer und nur einer dieser Klassen an.

Satz 15. *Dann und nur dann liegen alle eventuellen Nullstellen einer Folge* $\mathfrak{f}$ *im Inneren und sind simpel* (vgl. Nr. 7), *wenn alle Elementarfolgen der zugehörigen Vorzeichenfolge* $\tilde{\mathfrak{f}}$ *zu den Klassen* I, II, III, IV *gehören.*

Beweis. Klar.

Sei nun

$$\mathfrak{f} = (f_a, f_{a+1}, \cdots, f_m, \cdots, f_b)$$

eine endliche Folge; $f(m)$ sei eine stetige relle Funktion, die für alle rellen m mit

$$a \leqq m \leqq b \tag{57}$$

definiert ist und an jeder ihrer etwaigen Nullstellen ihr Vorzeichen wechselt; für ganzzahliges Argument sei $f(m) = f_m$. Ferner sei $z(\mathfrak{f})$ die Mindestanzahl von Nullstellen, die eine derartige Funktion $f(m)$ im Intervall (57) besitzen muß. Da offenbar $z(\mathfrak{f})$ bereits durch die zu $\mathfrak{f}$ gehörige Vorzeichenfolge $\tilde{\mathfrak{f}}$ bestimmt wird, wollen wir statt $z(\mathfrak{f})$ auch $z(\tilde{\mathfrak{f}})$ schreiben.

Satz 16. *Es ist*

$$z(\tilde{\mathfrak{f}}) = \sum_{\tilde{\mathfrak{e}} \leqq \tilde{\mathfrak{f}}} z(\tilde{\mathfrak{e}}),$$

wo über alle in $\tilde{\mathfrak{f}}$ *enthaltenen Elementarfolgen* $\tilde{\mathfrak{e}}$ *in der richtigen Vielfachheit summiert wird.*

Beweis. Die Zerlegung einer Folge $\tilde{\mathfrak{f}}$ in Elementarfolgen $\tilde{\mathfrak{e}}$ ergibt sich aus Satz 13; die den $\tilde{\mathfrak{e}}$ zwecks Bestimmung der $z(\tilde{\mathfrak{e}})$ zugeordneten Funktionen $e(m)$ lassen sich nach Multiplikation mit geeigneten Faktoren zu der der Folge $\tilde{\mathfrak{f}}$ zugeordneten Funktion $f(m)$ stetig zusammensetzen.

Für Elementarfolgen $\tilde{e}$ stellen wir nun unter Benutzung der obigen Klasseneinteilung die Funktionen $l(\tilde{e})$ und $z(\tilde{e})$ in einer Tabelle zusammen.

Klasse	$l(\tilde{e})$	$z(\tilde{e})$
I	0	0
II	1	0
III	1	1
IV	2	1
V	2	2
VI	$\geqq 3$	$l(\tilde{e})$ oder $l(\tilde{e})-1$
VII	$\geqq 1$	$l(\tilde{e})$
VIII	$\geqq 1$	$l(\tilde{e})$
IX	$\geqq 0$	$l(\tilde{e})+1$

Satz 17. *Wenn $\tilde{f}$ die in Satz 15 genannten Eigenschaften hat, so ist $z(\tilde{f})$ gleich der Anzahl der Zeichenwechsel von $\tilde{f}$.*

Beweis. Klar.

Unter Vorzeichenumkehr verstehen wir Vertauschung von $+$ und $-$ und Erhaltung der 0. Ist $\tilde{f}$ eine endliche Vorzeichenfolge, so sei $\mathfrak{P}(\tilde{f})$ diejenige Vorzeichenfolge, die aus $\tilde{f}$ durch Vorzeichenumkehr des zweiten, vierten, sechsten usw. Elements von $\tilde{f}$ hervorgeht. $-\mathfrak{P}(\tilde{f})$ sei diejenige Vorzeichenfolge, die aus $\tilde{f}$ durch Vorzeichenumkehr des ersten, dritten, fünften usw. Elements von $\tilde{f}$ hervorgeht. $\pm\mathfrak{P}$ bedeute: entweder $\mathfrak{P}$ oder $-\mathfrak{P}$.

Satz 18. *Übt man auf $\tilde{f}$ die Operation $\mathfrak{P}$ aus, so wird auf jede in $\tilde{f}$ enthaltene Elementarfolge $\tilde{e}$ die Operation $\pm\mathfrak{P}$ ausgeübt. Das dabei entstehende $\pm\mathfrak{P}(\tilde{e})$ ist eine Elementarfolge von $\mathfrak{P}(\tilde{f})$, und alle in $\mathfrak{P}(\tilde{f})$ enthaltenen Elementarfolgen werden so erhalten.*

Beweis. Klar.

Satz 19. *Stets ist*

$$z(-\mathfrak{P}(\tilde{f})) = z(\mathfrak{P}(\tilde{f})).$$

Beweis. $\mathfrak{P}(\tilde{f})$ und $-\mathfrak{P}(\tilde{f})$ unterscheiden sich nur durch Umkehrung sämtlicher Vorzeichen.

Satz 20. *Stets ist*

$$z(\tilde{f}) + z(\mathfrak{P}(\tilde{f})) \geqq l(\tilde{f}). \tag{58}$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn alle eventuellen Nullstellen einer zur Vorzeichenfolge $\tilde{f}$ gehörigen Zahlenfolge f im Inneren liegen und simpel sind.

Beweis. Wir betrachten zunächst Elementarfolgen $\tilde{e}$. Durch die Operation $\mathfrak{P}$ geht die Klasse II in die Klasse III und die Klasse III in die Klasse II über; alle übrigen Klassen gehen in sich über. Aus der Tabelle für $l(\tilde{e})$, $z(\tilde{e})$ ergibt sich daher

$$\begin{cases} z(\tilde{e}) + z(\mathfrak{P}(\tilde{e})) = l(\tilde{e}) & \text{für die Klassen I, II, III, IV} \\ z(\tilde{e}) + z(\mathfrak{P}(\tilde{e})) > l(\tilde{e}) & \text{für die Klassen V, VI, VII, VIII, IX.} \end{cases} \tag{59}$$

Summiert man (59) über alle in $\tilde{f}$ enthaltenen Elementarfolgen, so erhält man wegen Satz 14, 16, 18, 19 die Behauptung (58). Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn alle Elementarfolgen von $\tilde{f}$ zu den Klassen I, II, III, IV gehören, d. h. wenn der in Satz 15 behandelte Fall vorliegt.

13. Das zweite Oszillationstheorem. Aus (18), (19) ergibt sich

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} (g_1)\lambda) & k_1 & & & \\ k_1 & g_2(\lambda) & k_2 & & \\ & k_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & k_{n-1} \\ & & & k_{n-1} & g_n(\lambda) \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man diese Determinante nach der letzten Zeile, so erhält man (evtl. unter Benutzung von (20)) für $2 \leqq n \leqq N$

$$D_n(\lambda) = g_n(\lambda)\, D_{n-1}(\lambda) - k_{n-1}^2\, D_{n-2}(\lambda). \tag{60}$$

Für $n = 1$ gilt entsprechend

$$D_1(\lambda) = g_1(\lambda)\, D_0(\lambda). \tag{61}$$

Wir führen nun $y_1(\lambda), y_2(\lambda), \ldots, y_N(\lambda)$ durch die Substitution

$$\begin{cases} D_0(\lambda) = y_1(\lambda), \\ D_1(\lambda) = -k_1\, y_2(\lambda), \\ D_2(\lambda) = +k_1 k_2\, y_3(\lambda), \\ \vdots \\ D_n(\lambda) = (-1)^n k_1 k_2 \cdots k_n\, y_{n+1}(\lambda), \\ \vdots \\ D_{N-1}(\lambda) = (-1)^{N-1} k_1 k_2 \cdots k_{N-1}\, y_N(\lambda) \end{cases} \tag{62}$$

ein. Mit den Abkürzungen

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ c_n = (-1)^n k_1 k_2 \cdots k_n \quad (n = 1, 2, \ldots, N-1) \end{cases} \tag{63}$$

lautet die Umkehrung von (62)

$$y_n(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{c_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N). \tag{64}$$

Setzt man (62) in (60) und (61) ein, so erhält man nach Wegheben eines gemeinsamen Faktors

$$-k_n y_{n+1}(\lambda) = g_n(\lambda) y_n(\lambda) + k_{n-1} y_{n-1}(\lambda); \tag{65}$$

diese Formel gilt für $1 \leqq n \leqq N-1$, wenn man noch

$$y_0(\lambda) = 0 \tag{66}$$

setzt. Wir bemerken, daß aus (20), (62)

$$y_1(\lambda) = 1 \qquad \text{für alle } \lambda \tag{67}$$

folgt.

Setzt man nun speziell für λ den m-ten Eigenwert $\lambda^{(m)}$ ein, so geht (65) in die für die Komponenten eines Eigenvektors gültige Rekursionsformel (17) über. Den zu $\lambda^{(m)}$ gehörigen Eigenvektor (6) normieren wir nun so, daß

$$u_1^{(m)} = 1 \tag{68}$$

ist; nach (14) ist das möglich. Dann gilt

$$u_n^{(m)} = y_n(\lambda^{(m)}) \quad \text{für } n = 0, 1, \ldots, N, \tag{69}$$

denn (69) gilt für $n = 0$ nach (16), (66), für $n = 1$ nach (67),o (68), unffno r $= 2, 3, \ldots, N$ folgt dann (69) induktiv wegen der Übereinstimmung der Rekursdirnsümeln. Wir formulieren das Ergebnis wie folgt:

Satz 21. *Unter Voraussetzung der Normierung* (68) *gilt mit den Bezeichnungen* (19), (20), (63) *für die Komponenten des zum m-ten Eigenwert* $\lambda^{(m)}$ *gehörigen Eigenvektors* (6)

$$u_n^{(m)} = \frac{D_{n-1}(\lambda^{(m)})}{c_{n-1}}. \tag{70}$$

Beweis. (70) folgt aus (64), (69).

Wir setzen nun (stets mit der Normierung (68))

$$\mathfrak{f}^{(n)} = (u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(N)}). \tag{71}$$

Satz 22. *Unter der über* $\mathfrak{f}^{(1)}$ *gemachten Voraussetzung* (68) *gilt*

$$z(\tilde{\mathfrak{f}}^{(n)}) \leqq n-1 \qquad (n = 1, 2, \ldots, N). \tag{72}$$

Beweis. Der Quotient

$$\frac{D_{n-1}(\lambda)}{c_{n-1}}$$

ist wegen Satz 5 eine stetige Funktion von λ, hat genau $n-1$ reelle Nullstellen und wechselt an jeder Nullstelle sein Vorzeichen. Aus (70) und der in Nr. 12 gegebenen Definition der Funktion z folgt die Behauptung.

Satz 23. *Die für* $n = N$ *gemäß* (71) *gebildete Folge* $\mathfrak{f}^{(N)}$ *hat genau* $N-1$ *Zeichenwechsel, d. h. sämtliche Elemente von* $\mathfrak{f}^{(N)}$ *sind von Null verschieden und das Vorzeichen wechselt von Glied zu Glied.*

Beweis. Nach (15) ist jedes $u_N^{(m)}$ von Null verschieden, also wegen (70) (mit $n = N$)

$$D_{N-1}(\lambda^{(m)}) \neq 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, N). \tag{73}$$

In (23) gilt daher nirgends Gleichheit. Da nach Satz 5 $D_{N-1}(\lambda)$ an jeder Nullstelle $\lambda^{*(m)}$ sein Vorzeichen wechselt, ergibt sich, daß in der Folge

$$D_{N-1}(\lambda^{(1)}), D_{N-1}(\lambda^{(2)}), \ldots, D_{N-1}(\lambda^{(N)})$$

von Glied zu Glied das Vorzeichen wechselt; wegen (70) (mit $n = N$) gilt dann dasselbe für $\mathfrak{f}^{(N)}$. — Die wesentliche Aussage von Satz 23 hätte übrigens auch aus dem ersten Oszillationstheorem gefolgert werden können, dessen Kenntnis hier jedoch nicht vorausgesetzt werden sollte.

Satz 24. (Zweites Oszillationstheorem). *Unter Voraussetzung der Normierung* (68) *und bei Benutzung der Bezeichnung* (71) *gilt: Für jede der Zahlen* $n = 1, 2, \ldots, N$ *besitzt die Folge* $\mathfrak{f}^{(n)}$ *genau* $n-1$ *Zeichenwechsel.*

Der Beweis erfolgt gemeinsam mit dem eines Analogons von Satz 8, nämlich

Satz 25. *Jedes* $\mathfrak{f}^{(n)}$ *hat höchstens im Inneren Nullstellen, und diese sind simpel.*

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$z(\mathfrak{P}(\tilde{\mathfrak{f}}^{(n)})) \leqq N-n. \tag{74}$$

Zu diesem Zweck multiplizieren wir die $u_n^{(m)}$ so mit Faktoren h_m (wo also $h_m u_n^{(m)}$ zu bilden ist und h_m nur vom Spaltenindex m abhängt), dergestalt daß

$$h_m u_N^{(m)} = 1 \tag{75}$$

ist. (6) geht dabei in $h_m u^{(m)}$ über; das ist ebenfalls ein zu $\lambda^{(m)}$ gehöriger Eigenvektor, jedoch mit der Normierung, daß seine *letzte* Komponente gleich 1 ist. Setzt man

$$\mathfrak{g}^{(n)} = (h_1 u_n^{(1)}, h_2 u_n^{(2)}, \ldots, h_N u_n^{(N)}), \tag{76}$$

so gilt

$$z(\tilde{\mathfrak{g}}^{(n)}) \leqq N-n \qquad (n = 1, 2, \ldots, N). \tag{77}$$

(77) ist nämlich genau die Aussage von Satz 22, wenn man nur die Numerierung der Zeilen umkehrt, so daß also die bisherige n-te Zeile die Nummer $N-n+1$ erhält. Wegen (75) und Satz 23 gilt, daß in

$$h_1, h_2, \ldots, h_N \tag{78}$$

abwechselnd das positive und das negative Vorzeichen auftritt; ob das erste Element in (78) dabei das positive oder das negative Vorzeichen hat, bleibe dahingestellt. Jedenfalls ergibt der Vergleich von (71), (76) für die zugehörigen Vorzeichenfolgen die Aussage

$$\tilde{\mathfrak{g}}^{(n)} = \pm \mathfrak{P}(\tilde{\mathfrak{f}}^{(n)}), \tag{79}$$

und aus (77), (79) und Satz 19 folgt (74).

Durch Addition von (72), (74) erhält man

$$z(\tilde{\mathfrak{f}}^{(n)}) + z(\mathfrak{P}(\tilde{\mathfrak{f}}^{(n)})) \leqq (n-1) + (N-n) = N-1. \tag{80}$$

Andrerseits liefert Satz 20

$$z(\tilde{\mathfrak{f}}^{(n)}) + z(\mathfrak{P}(\tilde{\mathfrak{f}}^{(n)})) \geqq l(\tilde{\mathfrak{f}}^{(n)}) = N-1. \tag{81}$$

Ein Vergleich ergibt, daß in (80) und (81) Gleichheit gilt. Daraus, daß in (81) Gleichheit gilt, folgt nach Satz 20, daß alle eventuellen Nullstellen von $\mathfrak{f}^{(n)}$ im Inneren liegen und simpel sind. Satz 25 ist damit bewiesen.

Daraus, daß in (80) Gleichheit gilt, folgt, daß in (72) Gleichheit gilt, also

$$z(\tilde{\mathfrak{f}}^{(n)}) = n-1 \quad (n = 1, 2, \ldots, N). \tag{82}$$

Aus dem bewiesenen Satz 25 und Satz 17 folgt, daß $z(\tilde{\mathfrak{f}}^{(n)})$ gleich der Anzahl der Zeichenwechsel von $\mathfrak{f}^{(n)}$ ist. Wegen (82) ist damit das zweite Oszillationstheorem bewiesen.

Eingegangen 26. Oktober 1941.

Über eine Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix.*)

Von *Walter Buckel*, in Erlangen.

Einleitung.

In der klassischen Differentialgeometrie der Flächen des R_3 spielt eine wichtige Rolle die sogenannte Dupinsche Indikatrix, mit deren Hilfe sich das Verhalten der Fläche in der Umgebung des betrachteten Flächenpunktes in gewissem Sinne angenähert beschreiben läßt. Für diesen Indikatrixbegriff liegen in verschiedenen Richtungen Verallgemeinerungen vor[1]). In der vorliegenden Arbeit wird demgegenüber ein, wie uns scheint, neues Moment in die Betrachtungen hineingetragen.

Entscheidend nämlich für die Gewinnung unserer, wie wir glauben, naturgemäßen Verallgemeinerung war die Erkenntnis, daß die Dupinsche Indikatrix aufs innigste zusammenhängt mit geometrischen Ordnungen, speziell mit der kinematischen Ordnung des betrachteten Flächenpunktes bezüglich der Geraden des R_3. Dieser von Herrn Haupt aufgedeckte Zusammenhang[2]), welcher den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bildet, läßt die metrischen Eigenschaften der Dupinschen Indikatrix unberücksichtigt, rückt dagegen die Tatsache in den Vordergrund, daß die Dupinsche Indikatrix im allgemeinen die Ordnung des betrachteten Flächenpunktes angibt. Ob die Ordnung 3 oder 2 vorliegt, hängt im allgemeinen davon ab, ob es in dem betrachteten Punkte Tangenten gibt, die eine Berührung zweiten Grades mit der Fläche haben oder nicht. Um diese Frage zu entscheiden, hat man die in der Taylorentwicklung der Fläche enthaltene Form 2. Grades gleich Null zu setzen. Die Dupinsche Indikatrix erhält man, indem man diese Form gleich einer Konstanten setzt; die Wahl dieser Konstanten gleich Null bedeutet den Verzicht auf gewisse metrische Eigenschaften der Dupinschen Indikatrix. Der oben für $n = 3$ erwähnte Zusammenhang zwischen der Ordnung eines Flächenpunktes und dem höchsten in diesem Punkte vorhandenen Grad der Berührung einer Tangente bleibt auch bestehen für geeignet differenzierbare Hyperflächen des R_n (§ 1). Als Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix in der von uns angestrebten Richtung ergibt sich damit ein System von Gleichungen, welches man durch Nullsetzen der Formen der Grade 2 bis

---

*) Von der Universität Erlangen genehmigte Dissertation (D 29). Berichterstatter: Prof. Dr. Otto Haupt.

[1]) Wir zitieren chronologisch (S. V. = Schriftenverzeichnis am Schluß der Arbeit): Kommerell S. V. 13, Hjelmslev S. V. 11, Bouligand S. V. 3, Busemann u. Feller S. V. 4 (dort auch eine eingehende Würdigung der wichtigen Arbeit des Herrn Hjelmslev), Falckenberg S. V. 6. Siehe auch S. V. 5, S. 151, 154, 166, 167.

[2]) S. V. 8, S. 97.

$n-1$ aus der Taylorentwicklung der Fläche erhält (1526). Im allgemeinen kann man nun zu einer direkt geometrischen Fassung übergehen, indem man an die Stelle dieser Gleichungen die ineinandergeschachtelten Mengen der Tangenten der Mindestberührungsgrade 1, 2, ... setzt (1531). Damit ist zugleich der Übergang zu den direkt geometrischen Methoden vollzogen[3]). Die so definierte Indikatrix erweist sich ihrerseits als überaus verallgemeinerungsfähig, wobei ihre Eigenschaft als „Ordnungsanzeiger" erhalten bleibt (§ 2). Diese allgemeinen Entwicklungen des § 2 werden zum Schluß (§ 3) dazu benutzt, um für entsprechend differenzierbare Hyperflächen im R_n die Indikatrix rechnerisch zu ermitteln, wobei aber, allgemeiner als in § 1, nicht die Geraden (lineare Ordnung), sondern beliebige, hinreichend oft differenzierbare Bogen als (Ordnungs)-Charakteristiken der kinematischen Ordnung zugrunde gelegt werden.*)

§ 1. Über die Auflösung des Berührungspunktes einer Tangente an eine Hyperfläche in mehrere gemeinsame Punkte.

Wir studieren in diesem Paragraphen die Auflösung des Berührungspunktes einer Tangente an eine Hyperfläche in mehrere gemeinsame Punkte. Die Möglichkeit der Auflösung des Berührungspunktes in zwei verschiedene gemeinsame Punkte ist trivial. Für die Möglichkeit der Auflösung in $m \geqq 3$ verschiedene gemeinsame Punkte werden wir zunächst eine notwendige und dann auch eine hinreichende Bedingung kennen lernen. Diese Ergebnisse werden uns dann in den Stand setzen, mit Methoden der klassischen Differentialgeometrie zu ordnungsgeometrischen Aussagen über Hyperflächenpunkte zu gelangen.

111. Der Sachverhalt.

1111. Hyperflächenstück. Es sei $k \geqq 2$ und ganz. Im k-dimensionalen Euklidischen Raume der Punkte $P = (x_1, \ldots, x_k)$ liege ein Bereich $\mathfrak{B}$, der ein topologisches Bild eines offenen k-dimensionalen Würfels sein soll. In diesem Bereich $\mathfrak{B}$ sei eine reelle Funktion $y = f(P)$ erklärt, über die wir folgende Voraussetzungen machen wollen:

1. $f(P)$ sei überall in $\mathfrak{B}$ stetig.

2. Die partiellen Ableitungen von $f(P)$ seien bis zur Ordnung $k+1$ einschließlich überall in $\mathfrak{B}$ erklärt und stetig.

Die Funktion $y = f(P)$ gibt uns im $(k+1)$-dimensionalen Euklidischen Raume der Punkte $(x_1, \ldots, x_k, y)$ ein Hyperflächenstück, das heißt ein topologisches Bild eines k-dimensionalen, offenen Würfels,

*) Zusatz bei der Korrektur: In § 2 handelt es sich also nicht mehr allein um die in § 1 entwickelte „affine" Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix, also letzten Endes nicht nur um eine Verallgemeinerung der Haupttangentenkurven (vgl. dazu F. Roger, Zentralblatt für Math. **24** (1943), S. 138, Besprechung von W. Buckel, Über die Auflösung mehrfacher Nullstellen ..., Sitz.-Ber. d. physikal.-med. Societät zu Erlangen **73** (1942-43), S. 13-21). So kann man z. B. entsprechend § 2 auch die metrischen Eigenschaften der Dupinschen Indikatrix direkt geometrisch wiedergeben, und dies läßt sich leicht für Hyperflächen im R_n verallgemeinern.

[3]) In der Arbeit der Herren Busemann u. Feller wird auf direkt geometrischem Wege unter Verzicht auf Differenzierbarkeitsvoraussetzungen eine Indikatrix für konvexe Flächen des R_3 definiert. Diese Indikatrix beschreibt aber im wesentlichen metrische Eigenschaften des betrachteten Flächenpunktes. Der Ordnungsbegriff tritt hierbei, wegen der Beschränkung auf konvexe Flächen, naturgemäß zurück.

1112. Tangente. Es sei $P^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$ ein Punkt von $\mathfrak{B}$ und $y^* = f(P^*)$. Den zu P^* gehörenden Hyperflächenpunkt $(x_1^*, \ldots, x_k^*, y^*)$ bezeichnen wir auch kürzer mit (P^*, y^*). Wir betrachten eine im Punkte (P^*, y^*) an die Hyperfläche gelegte Tangente g^*. Es sei g^* gegeben durch:

$$x_1 = x_1^* + \alpha_1^* t, \ldots, x_k = x_k^* + \alpha_k^* t, \; y = y^* + \beta^* t;$$

dabei sei $\alpha_1^{*2} + \cdots + \alpha_k^{*2} = 1$. Da g^* Tangente an die Hyperfläche im Punkte (P^*, y^*) sein soll, so muß $\beta^* = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^* + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^*\right)^{(1)} f(P^*)$ sein.

112. Einige Definitionen.

1121. Begriff der Auflösung. Es sei r der Radius einer ganz in $\mathfrak{B}$ liegenden, k-dimensionalen, offenen Kugel mit dem Mittelpunkt P^*. Wir sagen, der Berührungspunkt der Tangente g^* lasse sich in mindestens $m \geqq 2$ verschiedene, gemeinsame Punkte auflösen, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\varrho > 0$ mit $\varrho \leqq \frac{r}{2}$ eine Gerade g, gegeben durch

$$x_1 = x_1^{(0)} + \alpha_1^{(0)} t, \ldots, x_k = x_k^{(0)} + \alpha_k^{(0)} t, \; y = y^{(0)} + \beta^{(0)} t$$

mit $(\alpha_1^{(0)})^2 + \cdots + (\alpha_k^{(0)})^2 = 1$ gibt, die folgende Eigenschaften hat:

1. $$|x_1^{(0)} - x_1^*| < \varrho, \ldots, |x_k^{(0)} - x_k^*| < \varrho;$$
$$|\alpha_1^{(0)} - \alpha_1^*| < \varepsilon, \ldots, |\alpha_k^{(0)} - \alpha_k^*| < \varepsilon.$$

2. Die wegen $\varrho \leqq \frac{r}{2}$ im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ mit Sicherheit erklärte Funktion

$$\psi(t) = f(x_1^{(0)} + \alpha_1^{(0)} t, \ldots, x_k^{(0)} + \alpha_k^{(0)} t) - (y^{(0)} + \beta^{(0)} t)$$

hat in diesem Intervall mindestens m verschiedene Nullstellen. Es ist nicht schwer einzusehen, daß der Berührungspunkt einer jeden Tangente sich in mindestens zwei verschiedene gemeinsame Punkte auflösen läßt.

1122. Berührungsgrad. Wir sagen von jeder Tangente g^* an die Hyperfläche, sie habe mindestens den Berührungsgrad 1. Ist $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^* + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^*\right)^{(2)} f(P^*) \neq 0$, so sagen wir, der Berührungsgrad von g sei genau gleich 1. Ist $m \geqq 3$ und das Zahlensystem $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$ eine Lösung des Gleichungssystems:

$$h_2 \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(2)} \quad f(P^*) = 0,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$h_{m-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(m-1)} f(P^*) = 0,$$

so sagen wir, der Berührungsgrad von g^* sei mindestens gleich $m - 1$. Ist außerdem

$$h_m(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^* + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^*\right)^{(m)} \quad f(P^*) \neq 0,$$

so sagen wir, der Berührungsgrad von g sei genau gleich $m - 1$.

1123. Auflösungsmatrix. Es sei $m \geqq 3$. Mit Hilfe der Polynome $h_2, \ldots, h_{m-1}$ bilden wir die Funktionalmatrix

$$\mathfrak{M}_{m-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial h_{m-1}}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial h_{m-1}}{\partial \alpha_k} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathfrak{M}_{m-1}(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$ nennen wir die $(m-1)$-te Auflösungsmatrix von g^*. Der Name Auflösungsmatrix ist deshalb berechtigt, weil, wie wir sehen werden, uns diese Matrix einen Schluß auf die Auslösbarkeit des Berührungspunktes von g^* in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte gestatten wird.

113. **Formulierung der Bedingungen** für die Auflösbarkeit des Berührungspunktes von g^* in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte.

1131. **Notwendige Bedingung.** *Es sei* $3 \leqq m \leqq k+2$. *Notwendig für die Auflösbarkeit des Berührungspunktes von* g^* *in mindestens* m *verschiedene gemeinsame Punkte ist, daß der Berührungsgrad von* g^* *mindestens gleich* $m-1$ *ist.*

Der Beweis folgt in 12.

1132. **Hinreichende Bedingung.** *Es sei* $3 \leqq m \leqq k+1$. *Hinreichend für die Auflösbarkeit des Berührungspunktes von* g^* *in mindestens* m *verschiedene gemeinsame Punkte ist, daß*

1. *der Berührungsgrad von* g^* *mindestens gleich* $m-1$ *ist,*
2. *außerdem der Rang der* $(m-1)$*-ten Auflösungsmatrix von* g^* *gleich ihrer Zeilenzahl, also gleich* $m-2$ *ist.*

Der Beweis folgt in 13.

12. **Beweis** der in 1131 aufgestellten notwendigen Bedingung. Zum Beweise betrachten wir die beiden Zahlenfolgen $\{\varepsilon_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ und $\{\varrho_n\} = \left\{\frac{r}{2^n}\right\}$. Die Definition von r ist in 1121 gegeben. Es wird vorausgesetzt, daß $3 \leqq m \leqq k+2$ und daß der Berührungspunkt von g^* sich in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen lasse. Dann gibt es zu jedem Zahlenpaar ε_n, ϱ_n mit $n \geqq 1$ eine Gerade g_n, gegeben durch

$$x_1 = x_1^{(n)} + \alpha_1^{(n)} t, \ldots, x_k = x_k^{(n)} + \alpha_k^{(n)} t, \; y = y^{(n)} + \beta^{(n)} t$$

mit $(\alpha_1^{(n)})^2 + \cdots + (\alpha_k^{(n)})^2 = 1$, die folgende Eigenschaften hat:

1. $$|x_1^{(n)} - x_1^*| < \varrho_n, \ldots, |x_k^{(n)} - x_k^*| < \varrho_n,$$
$$|\alpha_1^{(n)} - \alpha_1^*| < \varepsilon_n, \ldots, |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^*| < \varepsilon_n.$$

2. Die wegen $\varrho_n \leqq \frac{r}{2}$ im Intervall $(-\varrho_n, \varrho_n)$ mit Sicherheit erklärte Funktion $\psi_n(t) = f(x_1^{(n)} + \alpha_1^{(n)} t, \ldots, x_k^{(n)} + \alpha_k^{(n)} t) - (y^{(n)} + \beta^{(n)} t)$ hat in diesem Intervall mindestens m verschiedene Nullstellen $t_1^{(n)}, \ldots, t_m^{(n)}$.

Aus der Eigenschaft 1. von g_n folgt sofort:

(1) $$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = x_1^*, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^*; \lim_{n\to\infty} \alpha_1^{(n)} = \alpha_1^*, \ldots, \lim_{n\to\infty} \alpha_k^{(n)} = \alpha_k^*.$$

Wegen der in 1111 über $f(P)$ gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ist die Funktion $\psi_n(t)$ im ganzen Intervall $(-\varrho_n, \varrho_n)$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar.

Nun sei m' irgendeine der Zahlen $3, \ldots, m$. Wir bilden mit den m' Nullstellen $t_1^{(n)}, \ldots, t_{m'}^{(n)}$ von $\psi_n(t)$ den Differenzenquotienten[4]) der Ordnung $m'-1$ von $\psi_n(t)$:

[4]) S. V. 10, S. 70ff.

$$[t_1^{(n)}, \ldots, t_{m'}^{(n)}]\,\varphi_n = 0.$$

Wegen $m' - 1 \leqq m - 1 \leqq k + 1$ kann man den ersten Mittelwertsatz der Differenzenrechnung anwenden. Man bekommt damit: Zwischen dem größten und dem kleinsten der Werte $t_1^{(n)}, \ldots, t_{m'}^{(n)}$ gibt es wenigstens eine Stelle τ_n, für die $\varphi_n^{(m'-1)}(\tau_n) = 0$ gilt. Da τ_n im Intervall $(-\varrho_n, \varrho_n)$ liegt, so ist $|\tau_n| < \varrho_n$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0. \tag{2}$$

Wegen $m' - 1 \geqq 2$ ist $(y^{(n)} + \beta'^{n} t)^{(m'-1)} = 0$. Daher folgt aus $\varphi_n^{(m'-1)}(\tau_n) = 0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^{(n)} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^{(n)}\right)^{(m'-1)} f(x_1'^{(n)} + \alpha_1^{(n)}\tau_n, \cdots, x_k'^{(n)} + \alpha_k^{(n)}\tau_n) = 0.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung konvergiert nun aber wegen (1) und (2) und wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen der Ordung $m' - 1$ der Funktion $y = f(P)$ gegen den Wert

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^* + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^*\right)^{(m'-1)} f(P^*).$$

Dieser Wert ist also gleich Null, und da m' jede beliebige der Zahlen $3, \ldots, m$ sein kann, ist damit die Bedingung als notwendig erwiesen.

13. **Beweis** der in 1132 aufgestellten hinreichenden Bedingung.

1311. Zu diesem Beweise benötigen wir mehrere Hilfssätze. Wir schicken der Formulierung des ersten dieser Hilfssätze einige Definitionen voraus.

Es sei $k \geqq 2$ und $1 \leqq l \leqq k$. Wir betrachten l Funktionen von k Variablen:

$$p_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \ldots, p_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_k).$$

Einen Punkt im Raume der Zahlen k-tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ bezeichnen wir mit A. In einer Umgebung des Punktes $A^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$ sollen die l Funktionen $p_1, \ldots, p_l$ erklärt und stetig sein und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben.

Unter $M_l(A)$ verstehen wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_k} \end{pmatrix},$$

unter $\mathfrak{M}_0$ den ganzen Raum der Punkte A und unter $\mathfrak{M}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ die Gesamtheit aller der Punkte von $\mathfrak{M}_0$, für die $p_\lambda(A) = 0$ gilt.

Mit Hilfe der Mengen $\mathfrak{M}_0, \ldots, \mathfrak{M}_l$ bilden wir nun ein neues System von Mengen auf folgende Weise: Wir definieren

$$\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{M}_0, \quad \mathfrak{D}_\lambda = \mathfrak{D}_{\lambda-1} \cdot \mathfrak{M}_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, l).$$

Es ist also $\mathfrak{D}_\lambda$ die Gesamtheit aller gemeinsamen Lösungen der Gleichungen

$$p_1(A) = 0, \ldots, p_\lambda(A) = 0.$$

Wir bezeichnen weiter die Menge aller Punkte von $\mathfrak{D}_{\lambda-1}$, für die $p_\lambda(A) > 0$ gilt, mit $\mathfrak{D}_\lambda^+$ und entsprechend die Menge aller Punkte von $\mathfrak{D}_{\lambda-1}$, für die $p_\lambda(A) < 0$ gilt, mit $\mathfrak{D}_\lambda^-$. Dann hat man: $\mathfrak{D}_{\lambda-1} = \mathfrak{D}_\lambda^+ + \mathfrak{D}_\lambda + \mathfrak{D}_\lambda^-$.

1312. **Hilfssatz 1.** *Voraussetzungen.* 1. A^* *sei ein Punkt von* $\mathfrak{D}_l$.

2. *Der Rang der Matrix* $M_l(A^*)$ *sei gleich* l, *also gleich der Zeilenzahl.*

Behauptung. In jeder Umgebung von A^* *gibt es wenigstens einen Punkt* A^+ *von* $\mathfrak{D}_l^+$ *und wenigstens einen Punkt* A^- *von* $\mathfrak{D}_l^-$.

1313. *Beweis.* Wir liefern den Beweis, indem wir ein ganz in $\mathfrak{D}_{l-1}$ verlaufendes Kurvenstück mit dem inneren Punkt A^* betrachten, von dem wir zeigen können, daß es im Punkte A^* von dem einen der beiden Bereiche $\mathfrak{D}_l^+$, $\mathfrak{D}_l^-$ in den anderen übertritt. O. B. d. A. sei die Determinante

$$D(A^*) = \left| \begin{matrix} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_l} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \alpha_l}{\partial p_l} \end{matrix} \right|_{A^*} \neq 0$$

und für den Fall $l > 1$ auch die Determinante

$$d(A^*) = \left| \begin{matrix} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_{l-1}} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial p_{l-1}}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial p_{l-1}}{\partial \alpha_{l-1}} \end{matrix} \right|_{A^*} \neq 0.$$

Für den Fall $l > 1$ betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &p_1\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l, \alpha_{l+1}^*, \ldots, \alpha_k^*) = 0, \\ &\ldots, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &p_{l-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l, \alpha_{l+1}^*, \ldots, \alpha_k^*) = 0 \end{aligned}$$

mit den l Unbekannten $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen sind in einem Intervall $|\alpha_l - \alpha_l^*| < \delta$ durch dieses Gleichungssystem die $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ als eindeutige Funktionen von α_l erklärt:

$$\alpha_1 = \chi_1(\alpha_l), \ldots, \alpha_{l-1} = \chi_{l-1}(\alpha_l).$$

Dabei ist: $\alpha_1^* = \chi_1(\alpha_l^*), \ldots, \alpha_{l-1}^* = \chi_{l-1}(\alpha_l^*)$. Weiter setzen wir durch Definition:

$$\chi_l(\alpha_l) = \alpha_l,\ \chi_{l+1}(\alpha_l) = \alpha_{l+1}^*, \ldots, \chi_k(\alpha_k) = \alpha_k^*.$$

Im Falle $l = 1$ haben wir überhaupt nur diese letzteren Gleichungen.

In beiden Fällen, $l = 1$ und $l > 1$, ist uns nun durch die in einem Intervall $|\alpha_l - \alpha_l^*| < \delta$ erklärten Funktionen

$$\alpha_1 = \chi_1(\alpha_l), \ldots, \alpha_k = \chi_k(\alpha_l)$$

im Raume der Punkte A ein Kurvenstück gegeben. Dieses Kurvenstück enthält A^* als inneren Punkt, verläuft ganz in $\mathfrak{D}_{l-1}$ und ist außerdem in einen linearen Raum von der Dimension l eingebettet. Ist also $l = 1$, so ist das Kurvenstück eine Strecke. Wir wollen nun zeigen, daß das Kurvenstück streckbar ist. Für $l = 1$ ist dies trivial. Ist $l > 1$, so betrachten wir nun noch die Determinanten, die aus $d = d(A)$ hervorgehen, wenn man in der λ-ten Spalte die Ableitungen nach α_λ durch die derselben Funktionen nach α_l ersetzt. Die so entstehenden Determinanten bezeichnen wir entsprechend mit $d_\lambda = d_\lambda(A)$. Für das Intervall $|\alpha_l - \alpha_l^*| < \delta$ gilt dann:

$$\frac{d\chi_1}{d\alpha_l} = -\frac{d_1}{d}, \ldots, \frac{d\chi_{l-1}}{d\alpha_l} = -\frac{d_{l-1}}{d},\ \frac{d\chi_l}{d\alpha_l} = 1,\ \frac{d\chi_{l+1}}{d\alpha_l} = 0, \ldots, \frac{d\chi_k}{d\alpha_l} = 0.$$

Aus der Stetigkeit dieser Ableitungen folgt die Streckbarkeit des Kurvenstücks für ein Intervall $|\alpha_l - \alpha_l^*| \leqq \delta'$ mit $0 < \delta' < \delta$. Wir können daher jetzt die vom Punkte A^*

aus gemessene Bogenlänge als neuen Parameter s für die Darstellung des Kurvenstücks wählen. Das Vorzeichen der Bogenlänge s soll dabei so festgelegt werden, daß $\left(\frac{d\alpha_l}{ds}\right)_{s=0}$ dasselbe Vorzeichen wie $d(\mathsf{A}^*)$ bekommt.

Wir setzen $+\sqrt{d_1^2+\cdots+d_{l-1}^2+d^2}=w$. Es gibt ein Intervall $|s|<\bar{\delta}$, in welchem für das Kurvenstück gilt:

$$\frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{d_1}{w},\ldots,\frac{d\alpha_{l-1}}{ds}=-\frac{d_{l-1}}{w},\frac{d\alpha_l}{ds}=\frac{d}{w},\frac{d\alpha_{l+1}}{ds}=0,\ldots,\frac{d\alpha_k}{ds}=0.$$

Nun betrachten wir die Werte von $p_l(\mathsf{A})$ auf dem Kurvenstück in einer Umgebung des Punktes A^*. Wir bilden:

$$p_l(s)=p_l(\alpha_1(s),\ldots,\alpha_k(s))=p_l(\alpha_1(s),\ldots,\alpha_l(s),\alpha_{l+1}^*,\ldots,\alpha_k^*).$$

An der Stelle $s=0$ gilt $p_l(0)=0$ und

$$\begin{aligned}\left(\frac{dp_l}{ds}\right)_{s=0}&=\frac{\partial p_l}{\partial\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{ds}+\cdots+\frac{\partial p_l}{\partial\alpha_l}\frac{d\alpha_l}{ds}\\&=-\frac{\partial p_l}{\partial\alpha_1}\frac{d_1}{w}-\cdots-\frac{\partial p_l}{\partial\alpha_{l-1}}\frac{d_{l-1}}{w}+\frac{\partial p_l}{\partial\alpha_l}\frac{d}{w}\\&=\frac{D(\mathsf{A}^*)}{w}\neq 0.\end{aligned}$$

Man überzeugt sich von der Richtigkeit des letzten Gleichheitszeichens, indem man sich an die Bedeutung von $d_1,\ldots,d_{l-1}$ und d erinnert.

Nun sei $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ eine Umgebung von A^* und $\mathfrak{K}_r$ eine k-dimensionale, offene Kugel um den Mittelpunkt A^*, die ganz in $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ liegt. Wir betrachten zunächst den Fall $\left(\frac{dp_l}{ds}\right)_{s=0}>0$. Dann gibt es ein Teilintervall $|s|<\bar{\bar{\delta}}$ des Intervalles $|s|<\bar{\delta}$ derart, daß in diesem Teilintervall für $s>0$ auch $p_l(s)>0$ und für $s<0$ auch $p_l(s)<0$ ist. Daraus folgt: Jedes s mit $0<s<\bar{\bar{\delta}}$ liefert einen Kurvenpunkt A^+ von $\mathfrak{D}_l^+$, und jedes s mit $-\bar{\bar{\delta}}<s<0$ liefert einen Kurvenpunkt A^- von $\mathfrak{D}_l^-$. Um zu erreichen, daß diese Punkte A^+ und A^- auch in $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ liegen, hat man nur noch $|s|<r$ zu wählen.

Entsprechend ist der Fall $\left(\frac{dp_l}{ds}\right)_{s=0}<0$ zu behandeln. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

1314. Der Hilfssatz 1 läßt sich mühelos noch etwas erweitern. Dazu betrachten wir die Matrix $\mathsf{M}_\lambda(\mathsf{A})$, die aus $\mathsf{M}_l(\mathsf{A})$ entsteht, wenn man die $(\lambda+1)$-te und alle späteren Zeilen wegläßt. Der Rang von $\mathsf{M}_\lambda(\mathsf{A}^*)$ ist λ. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen $\frac{\partial p_1}{\partial\alpha_1},\ldots,\frac{\partial p_l}{\partial\alpha_l}$ gibt es eine Umgebung von A^*, in der sich der Rang einer jeden der Matrizen $\mathsf{M}_1(\mathsf{A}),\ldots,\mathsf{M}_l(\mathsf{A})$ nicht ändert.

Daraus folgt mit Benutzung von Hilfssatz 1 die

Erweiterung. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 1 gibt es eine offene Umgebung $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ des Punktes A^* derart, daß für $\lambda=1,\ldots,l$ zu jedem Punkt A aus $\mathfrak{D}_\lambda$, der zugleich ein Punkt von $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ ist, in beliebiger Nähe von A mindestens ein Punkt A^+ aus $\mathfrak{D}_\lambda^+$ und mindestens ein Punkt A^- aus $\mathfrak{D}_\lambda^-$ existieren, die beide ebenfalls zu $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ gehören.*

132. Die beiden weiteren Hilfssätze, die wir noch benötigen, enthalten Aussagen über den Begriff des berührungsfreien Schnittpunktes einer ebenen Kurve und einer in

derselben Ebene gelegenen Geraden. Wir haben daher zunächst den Begriff des berührungsfreien Schnittpunkts zu definieren.

1321. **Berührungsfreier Schnittpunkt.** In einem Intervall (t_1, t_2) sei eine Funktion $y = f(t)$ erklärt und wenigstens einmal stetig differenzierbar. Außerdem liege in der y, t-Ebene eine Gerade $y = g(t) \equiv y_0 + \beta_0 t$. Wir sagen: An der Stelle t_0 aus (t_1, t_2) liege ein **berührungsfreier Schnittpunkt** von $f(t)$ und $g(t)$ vor, wenn folgendes gilt:

$$1.\ f(t_0) = g(t_0)$$
$$2.\ f'(t_0) \neq g'(t_0).$$

1322. Der zweite Hilfssatz, den wir benötigen, besagt, daß ein berührungsfreier Schnittpunkt durch eine hinreichend kleine Änderung der Geraden nicht zerstört wird[5]).

Hilfssatz 2. *Voraussetzung. An der Stelle t_0 liege ein berührungsfreier Schnittpunkt von $f(t)$ und $g_{y_0,\beta_0}(t) \equiv y_0 + \beta_0 t$ vor.*

Behauptung. Zu jedem $\eta > 0$ gibt es ein $\zeta > 0$ derart, daß jede Gerade $g_{y_1,\beta_1}(t) \equiv y_1 + \beta_1 t$, für die $|y_1 - y_0| < \zeta$ und $|\beta_1 - \beta_0| < \zeta$ gilt, mit $f(t)$ einen berührungsfreien Schnittpunkt hat, für dessen Abszisse t^* gilt: $|t^* - t_0| < \eta$.

Beweis. Wir setzen $|f'(t_0) - g'_{y_0,\beta_0}(t_0)| = u$. Es ist $u > 0$. Wegen der Stetigkeit von $f'(t)$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß für $|t - t_0| \leqq \delta$ gilt: $|f'(t) - f'(t_0)| < \frac{u}{2}$.

Nun sei $\eta > 0$ gegeben. Wir setzen $\delta_1 = \mathrm{Min}\,(\delta, \eta)$ und zeigen, daß

$$F(t) = f(t) - g_{y_0,\beta_0}(t)$$

außer t_0 keine weitere Nullstellen in $|t - t_0| \leqq \delta_1$ hat. Wäre nämlich t eine solche weitere Nullstelle von $F(t)$, dann gäbe es nach dem ersten Mittelwertsatz zwischen t und t_0 eine Stelle τ mit $F'(\tau) = 0$. Es wäre also $f'(\tau) = g'_{y_0,\beta_0}(\tau)$. Da $g'_{y_0,\beta_0}(\tau) = g'_{y_0,\beta_0}(t_0) = \beta_0$ ist, wäre also $f'(\tau) = g'_{y_0,\beta_0}(t_0)$. Da τ in $|t - t_0| \leqq \delta_1$ läge, würde weiter gelten $|f'(\tau) - f'(t_0)| < \frac{u}{2}$. Es wäre also $|g'_{y_0,\beta_0}(t_0) - f'(t_0)| < \frac{u}{2}$, was mit der Bedeutung von u im Widerspruch steht.

Es gilt also insbesondere $F(t_0 - \delta_1) \neq 0$ und $F(t_0 + \delta_1) \neq 0$. Wir setzen

$$u_1 = \mathrm{Min}\,(|F(t_0 - \delta_1)|, |F(t_0 + \delta_1)|,$$
$$\varrho = \mathrm{Max}\,(|t_0 - \delta_1|, |t_0 + \delta_1|),$$
$$\zeta = \mathrm{Min}\left(\frac{u}{2}, \frac{u_1}{1 + \varrho}\right).$$

Dann gilt für jede Gerade $g_{y_1,\beta_1}(t) \equiv y_1 + \beta_1 t$ mit $|y_1 - y_0| < \zeta$ und $|\beta_1 - \beta_0| < \zeta$:

$$|g_{y_1,\beta_1}(t_0 - \delta_1) - g_{y_0,\beta_0}(t_0 - \delta_1)| = |(y_1 + \beta_1(t_0 - \delta_1)) - (y_0 + \beta_0(t_0 - \delta_1))|$$
$$= |(y_1 - y_0) + (\beta_1 - \beta_0)(t_0 - \delta_1)| \leqq |y_1 - y_0| + |\beta_1 - \beta_0| \cdot |t_0 - \delta_1|$$
$$< \zeta + \zeta\varrho = \zeta(1 + \varrho) \leqq \frac{u_1}{1 + \varrho}(1 + \varrho) = u_1.$$

---

[5]) Wir geben hier und an anderen Orten für einfache geometrische Behauptungen arithmetische Formulierungen und Beweise. Dies geschieht (abgesehen von der Vollständigkeit der Beweise), um Bezeichnungen und Überlegungen einzuführen, die später gebraucht werden und deren Einführung dort den Text zu sehr belasten würde.

Wegen der Bedeutung von u_1 besagt dies, daß an der Stelle $t_0 - \delta_1$ die beiden Geraden $g_{y_0,\beta_0}(t)$ und $g_{y_1,\beta_1}(t)$ auf ein und derselben Seite der Kurve $f(t)$ verlaufen.

Ebenso zeigt man dies für die Stelle $t_0 + \delta_1$. Da nun zwischen $t_0 - \delta_1$ und $t_0 + \delta_1$ die Gerade $g_{y_0,\beta_0}(t)$ die Kurve $f(t)$ durchsetzt, muß dies auch bei $g_{y_1,\beta_1}(t)$ der Fall sein. Es liegt also in $|t - t_0| < \delta_1$ eine Stelle t^*, für die $f(t^*) = g_{y_1,\beta_1}(t^*)$ gilt. Für t^* gilt aber auch:

$$\begin{aligned} |g'_{y_1,\beta_1}(t^*) - f'(t^*)| &= |g'_{y_1,\beta_1}(t^*) - g'_{y_0,\beta_0}(t_0) + g'_{y_0,\beta_0}(t_0) - f'(t^*)| \\ &\geqq |g'_{y_0,\beta_0}(t_0) - f'(t_0) + f'(t_0) - f'(t^*)| - |g'_{y_1,\beta}(t^*) - g'_{y_0,\beta_0}(t_0)| \\ &\geqq |g'_{y_0,\beta_0}(t_0) - f'(t_0)| - |f'(t_0) - f'(t^*)| - |\beta_1 - \beta_0| > u - \frac{u}{2} - \frac{u}{2} = 0. \end{aligned}$$

Es ist also $g'_{y_1,\beta_1}(t^*) \neq f'(t^*)$. Daher liegt an der Stelle t^* ein berührungsfreier Schnittpunkt von $g_{y_0,\beta_0}(t)$ und $f(t)$ vor. Außerdem liegt t^* in $|t - t^*| < \eta$. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen

1323. Der dritte Hilfssatz, den wir benötigen, macht eine Aussage über die Möglichkeit, den Berührungspunkt einer Tangente an eine ebene Kurve in zwei berührungsfreie Schnittpunkte aufzulösen[5]).

Hilfssatz 3. *Voraussetzung.* *$f(t)$ sei in (t_1, t_2) stetig und einmal stetig differenzierbar. An der Stelle t_0 aus (t_1, t_2) sei die Gerade $g_{y_0,\beta_0}(t) \equiv y_0 + \beta_0 t$ Tangente an $f(t)$.*

Behauptung. *Entweder fällt $f(t)$ in einer Umgebung von t_0 mit $g_{y_0,\beta_0}(t)$ zusammen oder es gibt zu jedem $\delta > 0$ in der Umgebung $|t - t_0| < \delta$ wenigstens einen Punkt $\bar{t}$, so daß die Sekante durch die Kurvenpunkte $t_0, f(t_0)$ und $\bar{t}, f(\bar{t})$ sowohl an der Stelle t_0 als auch an der Stelle $\bar{t}$ mit $f(t)$ einen berührungsfreien Schnittpunkt hat.*

Beweis. Es sei $\delta > 0$ und so gegeben, daß $|t - t_0| < \delta$ ganz in (t_1, t_2) liegt. Wir betrachten die Sekante s_τ durch die beiden Kurvenpunkte $t_0, f(t_0)$ und $\tau, f(\tau)$, wobei τ in $|t - t_0| < \delta$ beliebig veränderlich gedacht sei.

Für die Steigung $m(\tau)$ dieser Sekante gilt:

$$m(\tau) = \frac{f(\tau) - f(t_0)}{\tau - t_0}.$$

Wir setzen weiter fest $m(t_0) = f'(t_0)$. Wegen der Stetigkeit und stetigen Differenzierbarkeit von $f(t)$ ist $m(\tau)$ überall in $|\tau - t_0| < \delta$ erklärt und stetig. Nun nehmen wir an, es gebe in $|t - t_0| < \delta$ kein $\bar{t}$, wie es in der Behauptung gefordert wird. Dann gilt in jedem τ aus $|\tau - t_0| < \delta$ für die Steigung der Sekante s_τ entweder $m(\tau) = f'(t_0)$ oder $m(\tau) = f'(\tau)$.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

I. $m(t)$ ist überall in $|\tau - t_0| < \delta$ gleich $f'(t_0) = \beta$. Dann fällt $f(t)$ in $|t - t_0| < \delta$ mit $g_{y_0,\beta_0}(t)$ zusammen.

II. Es gibt eine Stelle τ^* in $|t - t_0| < \delta$, für die $m(\tau^*) \neq f'(t_0)$ ist. Es ist $\tau^* \neq t_0$.

Wir nehmen zunächst an, es sei $\tau^* > t_0$. Wegen der Stetigkeit von $m(\tau)$ gibt es ein größtes offenes Intervall J, das ganz in $t_0 < \tau < t_0 + \delta$ liegt, τ^* enthält und nur aus Punkten τ besteht, für welche $m(\tau) \neq f'(t_0)$ ist. Der linke Endpunkt von J wird von einem Punkt $\bar{\tau}$ gebildet, für den $m(\bar{\tau}) = f'(t_0)$ gilt. In J gilt:

$$m(\tau) = \frac{f(\tau) - f(t_0)}{\tau - t_0} = f'(\tau)$$

Daraus folgt:

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)-f(t_0)}=\frac{1}{\tau-t_0},$$

$$\log|f(\tau)-f(t_0)|=\log|\tau-t_0|+C,$$

$$\log\left|\frac{f(\tau)-f(t_0)}{\tau-t_0}\right|=C,$$

$$\frac{f(\tau)-f(t_0)}{\tau-t_0}=k.$$

Es ist also $m(\tau)$ in J konstant: Da im linken Endpunkt $\bar{\tau}$ von J $m(\bar{\tau})=f'(t_0)$ ist, so folgt aus der Stetigkeit von $m(\tau)$, daß in J $m(\tau)=f'(t_0)$ ist. Das ist aber ein Widerspruch zu $m(\tau^*)\neq f'(t_0)$. Analog behandelt man den Fall $\tau^*<t_0$. Damit ist gezeigt, daß der Fall II unmöglich ist.

Wenn es daher kein Intervall $|t-t_0|<\delta'$ gibt, in dem der Fall I eintritt, dann muß es zu jedem $\delta>0$ im Intervall $|t-t_0|<\delta$ eine Stelle $\bar{t}$ geben, die die Forderungen der Behauptung erfüllt. Damit ist auch der Hilfssatz 3 bewiesen.

133. Mit Hilfe der Hilfssätze 1, 2 und 3 soll jetzt die in 1132 aufgestellte hinreichende Bedingung bewiesen werden.

13311. Mit Benutzung von Hilfssatz 1 ziehen wir zunächst eine auch schon für $m=2$ gültige Folgerung aus den in 1132 angegebenen Bedingungen. Dazu betrachten wir die Polynome

$$h_1(\mathsf{A})\equiv\alpha_1^2+\cdots+\alpha^2{}_k-1,$$

$$h_2(\mathsf{A})\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(2)}f(P^*)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_{m-1}(\mathsf{A})\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(m-1)}f(P^*),$$

und die Matrix

$$\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A})=\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_1}&\cdots&\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_k}\\ \cdot&\cdots&\cdot\\ \frac{\partial h_{m-1}}{\partial\alpha_1}&\cdots&\frac{\partial h_{m-1}}{\partial\alpha_k}\end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_1}=2\alpha_1,\ldots,\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_k}=2\alpha_k.$$

Ist $m=2$ und $h_1(\mathsf{A}^*)=0$, so ist der Rang von $\mathsf{M}_1(\mathsf{A}^*)$ gleich 1, also gleich der Zeilenzahl. Nun sei $m\geqq 3$ und g^* eine Tangente, die die hinreichenden Bedingungen aus 1132 erfülle. Dann ist

$$h_1(\mathsf{A}^*)=0,\ h_2(\mathsf{A}^*)=0,\ldots,h_{m-1}(\mathsf{A}^*)=0$$

und der Rang der $(m-1)$-ten Auflösungsmatrix $\mathfrak{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ gleich $m-2$. Wir beweisen nun: Der Rang von $\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ ist gleich $m-1$. Zum Beweise fassen wir die Elemente der μ-ten Zeile von $\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{v}_\mu$ auf. Dann haben wir

$$\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)=\begin{pmatrix}\mathfrak{v}_1\\ \mathfrak{v}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \mathfrak{v}_{m-1}\end{pmatrix}\text{ und }\mathfrak{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)\equiv\begin{pmatrix}\mathfrak{v}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \mathfrak{v}_{m-1}\end{pmatrix}.$$

Wäre nun der Rang von $\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ kleiner als $m-1$, so hätte man, da der Rang von $\mathfrak{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ nach Voraussetzung gleich $m-2$ ist, eine Gleichung von der Gestalt:

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2\lambda_2 + \cdots + \lambda_{m-1}\mathfrak{v}_{m-1}.$$

Wir multiplizieren beiderseits skalar mit $\mathfrak{v}_1$ und bekommen:

$$\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_1 = \lambda_2\mathfrak{v}_2 \cdot \mathfrak{v}_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\mathfrak{v}_{m-1} \cdot \mathfrak{v}_1.$$

Für die linke Seite dieser Gleichung bekommt man:

$$\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_1 = 2\alpha_1^* \cdot 2\alpha_1^* + \cdots + 2\alpha_k^* \cdot 2\alpha_k^* = 4(h_1(\mathsf{A}^*) + 1).$$

Für die rechte Seite bekommt man mit Benützung des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen ($\mu = 2, \ldots, m-1$):

$$\mathfrak{v}_\mu \cdot \mathfrak{v}_1 = 2\left(\left(\frac{\partial h_\mu}{\partial \alpha_1}\right)_{\mathsf{A}^*} \alpha_1^* + \cdots + \left(\frac{\partial h_\mu}{\partial \alpha_k}\right)_{\mathsf{A}^*} \alpha_k^*\right) = 2\mu h_\mu(\mathsf{A}^*).$$

Also ergibt sich:

$$4(h_1(\mathsf{A}^*) + 1) = \lambda_2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot h_2(\mathsf{A}^*) + \cdots + \lambda_{m+1} \cdot 2 \cdot (m-1)h_{m-1}(\mathsf{A}^*).$$

Das führt aber wegen $h_1(\mathsf{A}^*) = 0, \ldots, h_{m-1}(\mathsf{A}^*) = 0$ zu einem Widerspruch. Also ist der Rang von $\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ gleich $m-1$.

13312. Nun führen wir für das Gleichungssystem $h_1(\mathsf{A}) = 0, \ldots, h_{m-1}(\mathsf{A}) = 0$ die Mengen $\mathfrak{D}_\mu$, $\mathfrak{D}_\mu^+$, $\mathfrak{D}_\mu^-$ ein, entsprechend den Definitionen von 1311. Dann haben wir für $m \geqq 2$:

1. A^* ist ein Punkt von $\mathfrak{D}_{m-1}$.

2. Der Rang der Matrix $\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ ist gleich $m-1$, also gleich der Zeilenzahl.

Wir können also die Erweiterung von Hilfssatz 1 anwenden und kommen zu dem Ergebnis:

Es gibt eine offene Umgebung $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ des Punktes A^* derart, daß für $\mu = 1, \ldots, m-1$ zu jedem Punkt A aus $\mathfrak{D}_\mu$, der zugleich ein Punkt von $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ ist, in beliebiger Nähe von A mindestens ein Punkt A^+ aus $\mathfrak{D}_\mu^+$ und mindestens ein Punkt A^- aus $\mathfrak{D}_\mu^-$ existieren, die beide ebenfalls zu $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ gehören.

13313. Nun stellen wir die folgende Behauptung auf: Es sei $1 \leqq \mu \leqq m-1$. Ferner sei $\bar{\mathsf{A}} = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k)$ ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_\mu$ und $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ und $0 < \varrho < r$ (Definition von r siehe in 1121).

Dann gibt es eine Gerade $g_{\mathsf{A},y_0,\beta_0}$, gegeben durch

$$x_1 = x_1^* + \alpha_1 t, \ldots, x_k = x_k^* + \alpha_k t, y = y_0 + \beta_0 t, \text{ wo } \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 = 1,$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $$|\alpha_1 - \bar{\alpha}_1| < \varepsilon, \ldots, |\alpha_k - \bar{\alpha}_k| < \varepsilon.$$

2. Die wegen $\varrho < r$ im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ mit Sicherheit erklärte Kurve

$$y = f_{\mathsf{A}}(t) = f(x_1^* + \alpha_1 t, \ldots, x_k^* + \alpha_k t)$$

verläuft entweder in einem Teilintervall des Intervalles $(-\varrho, \varrho)$ geradlinig und fällt dabei mit $g_{y_0,\beta_0}(t)$ zusammen oder sie hat mit der Geraden

$$y = g_{y_0,\beta_0}(t) \equiv y_0 + \beta_0 t$$

im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ mindestens $\mu + 1$ verschiedene berührungsfreie Schnittpunkte.

13314. Diese Behauptung enthält die Auflösbarkeit des Berührungspunktes der Tangente $\bar{g}$, gegeben durch

$$x_1 = x_1^* + \bar{\alpha}_1 t, \ldots, x_k = x_k^* + \bar{\alpha} t, y = y^* + \bar{\beta} t$$

mit $\bar{\alpha}_1^2 + \cdots + \bar{\alpha}_k^2 = 1$ und $\bar{\beta} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\bar{\alpha}_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\bar{\alpha}_k\right)^{(1)} f(P^*)$, in mindestens $\mu + 1$ gemeinsame Punkte, wie man durch Vergleich mit 1121 feststellt. Sie geht aber in zwei wesentlichen Punkten noch darüber hinaus.

1. Die in 1121 vorkommenden Koordinaten $x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}$ werden jetzt durch die Koordinaten von P^* ersetzt. Das heißt, es wird behauptet, daß man die Gerade g_{A, y_0, β_0} sogar so wählen kann, daß sie die im Punkte P^* auf dem Raum der Punkte P errichtete Senkrechte trifft.
2. In 1121 ist nur von gemeinsamen Punkten die Rede. Jetzt treten an deren Stelle berührungsfreie Schnittpunkte oder eine volle gemeinsame Strecke.

1332. Wir beweisen die in 13313 aufgestellte Behauptung durch vollständige Induktion.

13321. I. $\mu = 1$. $\bar{A}$ sei ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$. Es sei $\varepsilon > 0$ und $0 < \varrho < r$. Wir wählen für A den Punkt $\bar{A}$ selbst und betrachten die im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ mit Sicherheit erklärte Funktion $y = f_{\bar{A}}(t) = f(x_1^* + \bar{\alpha}_1 t, \ldots, x_k^* + \bar{\alpha}_k t)$. Durch irgend zwei verschiedene Punkte dieser Kurve, deren Abszissen t in $(-\varrho, \varrho)$ liegen, legen wir die Gerade $g_{y_0, \beta_0}(t) \equiv y_0 + \beta_0 t$. Sind nun diese beiden Punkte berührungsfreie Schnittpunkte, so leistet die Gerade $g_{\bar{A}, y_0, \beta_0}$, gegeben durch

$$x_1 = x_1^* + \bar{\alpha}_1 t, \ldots, x_k = x_k^* + \bar{\alpha}_k t, y = y_0 + \beta_0 t,$$

das, was in der Behauptung gefordert wird.

Ist mindestens einer dieser beiden Punkte ein Berührungspunkt von $f_{\bar{A}}(t)$ und $g_{y_0, \beta_0}(t)$, so sind nach Hilfssatz 3 zwei Fälle zu unterscheiden:

1. In einer Umgebung des Berührungspunktes fällt $f_{\bar{A}}(t)$ mit $g_{y_0, \beta_0}(t)$ zusammen. In diesem Falle leistet wieder die Gerade $g_{\bar{A}, y_0, \beta_0}$ das in der Behauptung Geforderte.

2. Der Berührungspunkt läßt sich durch eine beliebig kleine Drehung der Tangente um den Berührungspunkt in mindestens zwei verschiedene, berührungsfreie Schnittpunkte auflösen, die beide in $(-\varrho, \varrho)$ liegen. Durch die Drehung gehe g_{y_0, β_0} über in g_{y_1, β_1}. Dann leistet die Gerade $g_{\bar{A}, y_1, \beta_1}$, gegeben durch

$$x_1 = x_1^* + \bar{\alpha}_1 t, \ldots, x_k = x_k^* + \bar{\alpha}_k t, y = y_1 + \beta_1 t,$$

das in der Behauptung Geforderte.

Damit ist die Behauptung für $\mu = 1$ bewiesen.

13322. II. Wir nehmen an, die Behauptung sei für μ bewiesen. Dabei sei $1 \leqq \mu \leqq m - 1$. Es sei $\bar{A}$ ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_{\mu+1}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$, und es sei $\varepsilon > 0$ und $0 < \varrho < r$. Da $\bar{A}$ auch ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_\mu$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$ ist, so gibt es nach Induktionsannahme wenigstens eine Gerade g_{A, y_0, β_0}, die die Forderungen der Behauptung für μ erfüllt. Von einer jeden solchen Geraden wollen wir sagen, sie gehöre für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ). Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

133221. Fall A. Unter den für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehörenden Geraden gibt es wenigstens eine Gerade g_{A, y_0, β_0}, für die in einem Teilintervall von $(-\varrho, \varrho)$

$$f_A(t) = y_0 + \beta_0 t$$

gilt. In diesem Falle erfüllt die Gerade g_{A,y_0,β_0} die Forderungen der Behauptung auch für $\mu + 1$.

133222. Fall B. Unter den für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehörenden Geraden gibt es keine mit der unter Fall A beschriebenen Eigenschaft. Es sei g_{A,y_0,β_0} eine für $\bar{A}$ zu (ε, ϱ) gehörende Gerade. Dann hat nach Induktionsannahme die Kurve $f_A(t)$ mit der Geraden $y = y_0 + \beta_0 t$ mindestens $\mu + 1$ verschiedene berührungsfreie Schnittpunkte, dessen Abszissen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ liegen. t sei ein beliebiger Punkt des Intervalls $(-\varrho, \varrho)$. Wir bilden den Differenzenquotienten der Ordnung $\mu + 1$

$$\varphi_\varrho(t) = [t_1, \ldots, t_{\mu+1}, t](f_A).$$

$\varphi_\varrho(t)$ ist überall in $(-\varrho, \varrho)$ erklärt, an den Stellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ als Grenzdifferenzenquotient[4]) und in $(-\varrho, \varrho)$ überall k-mal stetig differenzierbar.

133223. Nun wird behauptet: Unter den Geraden, die nach Induktionsannahme für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehören, gibt es wenigstens eine, für die die Funktion $\varphi_\varrho(t)$ an einer Stelle t^* des Intervalls $(-\varrho, \varrho)$ verschwindet.

133224. Der Beweis für diese Behauptung soll in 133225 nachgeholt werden. Wir ziehen hier gleich aus ihr die Folgerungen. Die Gerade heiße g_{A,y_0,β_0}. Wir nehmen zunächst an, t^* sei von einer jeden der Stellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ verschieden. Ist $\mu = 1$, so hat man unmittelbar: $\varphi_\varrho(t^*) = [t_1, t_2, t^*](f_A) = 0$.

Für $\mu \geqq 2$ folgt aus

$$\varphi_\varrho(t^*) = \frac{1}{t_{\mu+1} - t^*}\left([t_1, \ldots, t_\mu, t_{\mu+1}](f_A) - [t_1, \ldots, t_\mu, t^*](f_A)\right) = 0$$

wegen $[t_1, \ldots, t_\mu, t_{\mu+1}](f_A) = 0$ die Beziehung

$$[t_1, \ldots, t_\mu, t^*](f_A) = 0.$$

So kann man weiterschließen bis auf $[t_1, t_2, t^*](f_A) = 0$. Es ist also stets

$$\frac{f_A(t_1) - f_A(t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{f_A(t_1) - f_A(t^*)}{t_1 - t^*} = 0.$$

Das heißt aber: Der Punkt $(t^*, f_A(t^*))$ ist ein weiterer gemeinsamer Punkt von $f_A(t)$ und $y_0 + \beta_0 t$. Ist dieser Punkt ein berührungsfreier Schnittpunkt, so leistet die Gerade g_{A,y_0,β_0} das in der Behauptung Geforderte. Ist er dagegen ein Berührungspunkt von $f_A(t)$ und $y_0 + \beta_0 t$, so kann man diesen Berührungspunkt nach Hilfssatz 3 durch den Übergang zu einer beliebig benachbarten Geraden $y = y_1 + \beta_1 t$ in zwei berührungsfreie Schnittpunkte auflösen, die beide in $(-\varrho, \varrho)$ liegen. Denn der Fall, daß $f_A(t)$ und $y_0 + \beta_0 t$ in einer Umgebung von t^* zusammenfallen, würde dem Fall A entsprechen und ist ausgeschlossen. Dabei kann man $y = y_1 + \beta_1 t$ nach Hilfssatz 2 so wählen, daß die bereits vorher vorhandenen $\mu + 1$ berührungsfreien Schnittpunkte nicht zerstört werden und im Inneren von $(-\varrho, \varrho)$ bleiben. $y = f_A(t)$ und $y = y_1 + \beta_1 t$ haben daher in $(-\varrho, \varrho)$ in diesem Falle sogar $\mu + 3$ berührungsfreie Schnittpunkte. Die Gerade g_{A,y_1,β_1}, gegeben durch

$$x_1 = x_1^* + \alpha_1 t, \ldots, x_k = x_k^* + \alpha_k t, y = y_1 + \beta_1 t \text{ mit } \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 = 1,$$

leistet also das in der Behauptung Geforderte.

Nun haben wir noch den Fall zu betrachten, daß t einem der Werte $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ gleich ist. Es sei o. B. d. A. $t^* = t_1$. Ist $\mu \geqq 2$, so schließen wir aus

$$[t_1, \ldots, t_{\mu+1}, t^*](f_A) = 0$$

wieder auf $[t_1, t_2, t^*](f_A) = 0$; ist $\mu = 1$, so ist unmittelbar $[t_1, t_2, t^*](f_A) = 0$. Das bedeutet aber hier

$$\frac{f_A(t_1) - f_A(t_2)}{t_1 - t_2} = f'(t^*) = f'(t_1).$$

Das heißt, an der Stelle $t_1 = t^*$ ist $y = y_0 + \beta_0 t$ Tangente an $y = f_A(t)$. Nach Induktionsannahme liegt aber an der Stelle t_1 ein berührungsfreier Schnittpunkt vor, also kann der Fall $t_1 = t^*$ gar nicht eintreten.

133225. Wir haben noch den Beweis für die in 133223 aufgestellte Behauptung nachzutragen. Wir nehmen an, diese Behauptung sei falsch. Dann gibt es unter den Geraden, die nach Induktionsannahme für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehören, keine, für die die Funktion $\varphi_g(t)$ an einer Stelle des Intervalls $(-\varrho, \varrho)$ verschwindet. Für jede solche Gerade muß daher $\varphi_g(t)$ überall in $(-\varrho, \varrho)$ dasselbe Vorzeichen haben, da $\varphi_g(t)$ stetig ist. Wir betrachten nun die Folge von Zahlenpaaren $\{\varepsilon_n, \varrho_n\}$, wobei $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$ und $\varrho_n = \frac{\varrho}{2^n}$ sein soll, und beweisen: Unter den Geraden, die nach Induktionsannahme für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ gehören, gibt es wenigstens eine Gerade g^+, für die in $(-\varrho, \varrho)$ überall $\varphi_{g^+}(t) > 0$ gilt.

Zum Beweise betrachten wir ein Zahlenpaar (ε', ϱ') mit $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon_n}{2}$ und $0 < \varrho' < \varrho$. Nach 13312 gibt es zu $\bar{A}$ einen Punkt A^+ aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}^+_{\mu+1}$ und $\mathfrak{U}_{A^+}$, für den $|\alpha_1^+ - \bar{\alpha}_1| < \varepsilon', \ldots, |\alpha_k^+ - \bar{\alpha}_k| < \varepsilon'$ gilt.

Da $\mathfrak{D}^+_{\mu+1}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{D}_n$ ist, so ist A^+ auch ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_\mu$ und $\mathfrak{U}_{A^+}$. Wir können daher auf den Punkt A^+ die Induktionsannahme anwenden und die Geraden g_{A,y_0,β_0} betrachten, die nach Induktionsannahme für den Punkt A^+ zum Zahlenpaar (ε', ϱ') gehören. Für jede solche Gerade g_{A,y_0,β_0} gilt:

$$|\alpha_1 - \bar{\alpha}_1| \leqq |\alpha_1 - \alpha_1^+| + |\alpha_1^+ - \bar{\alpha}_1| < \varepsilon' + \varepsilon' < \varepsilon_n,$$
$$|\alpha_k - \bar{\alpha}_k| \leqq |\alpha_k - \alpha_k^+| + |\alpha_k^+ - \bar{\alpha}_k| < \varepsilon' + \varepsilon' < \varepsilon_n.$$

Deswegen und wegen $\varrho' < \varrho$ gehört eine jede solche Gerade zugleich für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ und damit auch zum Zahlenpaar (ε, ϱ), also hat für jede solche Gerade die Funktion $\varphi_g(t)$ überall in $(-\varrho, \varrho)$ dasselbe Vorzeichen.

Wir können zeigen, daß $\varphi_g(t) > 0$ ist in $(-\varrho, \varrho)$, sobald man ε' und ϱ' hinreichend klein wählt. Dazu betrachten wir im Intervall $(-\varrho', \varrho')$ eine Stelle t', die von den ebenfalls in $(-\varrho', \varrho')$ gelegenen Abszissen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ der nach Induktionsannahme vorhandenen $\mu + 1$ verschiedenen Schnittpunkte von $y_0 + \beta_0 t$ und $f_A(t)$ verschieden ist. Dann gilt nach dem ersten Mittelwertsatz der Differenzenrechnung

$$\varphi_g(t') = f_A^{\mu+1}(\tau).$$

Dabei ist τ eine Stelle des Intervalls $(-\varrho', \varrho')$. Gäbe es nun zu beliebig kleinen ε' und ϱ' stets eine Gerade g mit $\varphi_g(t) < 0$ in $(-\varrho, \varrho)$, so könnte man eine Folge von Zahlenpaaren $\{\varepsilon_s', \varrho_s'\}$ konstruieren und dazu eine Folge $\{g_s\}$ von Geraden angeben derart, daß immer g_s für A^+ zum Zahlenpaar $(\varepsilon_s, \varrho_s)$ gehört, wobei gilt:

1. $\lim\limits_{s\to\infty} \varepsilon_s' = 0$; $\lim\limits_{s\to\infty} \varrho_s' = 0$.
2. In $(-\varrho, \varrho)$ ist $\varphi_g(t) < 0$.

Man könnte aus dem Intervall $(-\varrho_s, \varrho_s)$ eine Stelle t'_s wählen, die von den höchstens abzählbar unendlich vielen Schnittpunktabszissen $t_1^{(s)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(s)}$ verschieden ist, und bekäme

$$\varphi_{\varrho_s}(t'_s) = f_{A_s}^{(\mu+1)}(\tau_s).$$

Dabei läge τ_s in $(-\varrho'_s, \varrho'_s)$; es wäre also $|\tau_s| < \varrho'_s$. Aus $\lim_{s\to\infty} \varrho'_s = 0$ würde daher folgen: $\lim_{s\to\infty} \tau_s = 0$. Aus $\lim_{s\to\infty} \varepsilon'_s = 0$ folgt aber $\lim_{s\to\infty} A_s = A^+$. Aus $\lim_{s\to\infty} \tau'_s = 0$ und $\lim_{s\to\infty} A_s = A^+$ ergäbe sich nun wie beim Beweise der notwendigen Bedingung in 12

$$\lim_{s\to\infty} f_{A_s}^{(\mu+1)}(\tau_s) = f_{A^+}^{(\mu+1)}(0) = p_{\mu+1}(A^+).$$

Aus $\varphi_{\varrho_s}(t'_s) < 0$ würde aber $f_{A_s}^{(\mu+1)}(\tau_s) < 0$ folgen und daraus

$$\lim_{s\to\infty} f_{A_s}^{(\mu+1)}(\tau_s) = p_{\mu+1}(A^+) \leqq 0.$$

Da A^+ ein Punkt von $\mathfrak{D}^+_{\mu+1}$ ist, so ist $p_{\mu+1}(A^+) > 0$. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt.

Ganz analog beweist man: Unter den Geraden, die nach Induktionsannahme für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ gehören, gibt es wenigstens eine Gerade g^-, für die in $(-\varrho, \varrho)$ überall $\varphi_{g^-}(t) < 0$ gilt.

Nun ordnen wir jedem Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ der Folge $\{\varepsilon_n, \varrho_n\}$ eine solche Gerade g_n^+ zu, so daß in $(-\varrho, \varrho)$ überall $\varphi_{g_n^+}(t) > 0$ ist

Die Schnittpunktabszissen seien $t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}$; sie liegen in $(-\varrho_n, \varrho_n)$. Es sei t eine Stelle aus $(-\varrho, \varrho)$, die von den höchstens abzählbar unendlich vielen Stellen $t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}$ (für $n = 1, 2, 3, \ldots$) verschieden ist und für die $t > 0$ gilt.

Dann gilt für hinreichend große n wegen $\lim_{n\to\infty} \varrho_n = 0$:

$$t - t_1^{(n)} > 0, \ldots, t - t_{\mu+1}^{(n)} > 0.$$

Für $\mu \geqq 2$ folgt aus $[t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}, t](f_{A_n}) > 0$ wegen $[t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}](f_{A_n}) = 0$ und $t - t_{\mu+1}^{(n)} > 0$

$$[t_1^{(n)}, \ldots, t_\mu^{(n)}, t](f_{A_n}) > 0.$$

So kann man weiter schließen bis auf:

$$[t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, t](f_{A_n}) > 0.$$

Ist $\mu = 1$, so bedeutet $\varphi_{g_n^+}(t) > 0$ unmittelbar:

$$[t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, t](f_{A_n}) > 0.$$

Also ist stets:

$$\frac{f_{A_n}(t) - f_{A_n}(t_1^{(n)})}{t - t_1^{(n)}} > \frac{f(t_1^{(n)}) - f(t_2^{(n)})}{t_2^{(n)} - t_1^{(n)}}$$

Daraus folgt durch Grenzübergang:

$$\frac{f_{\bar{A}}(t) - f_{\bar{A}}(0)}{t} \geqq f'_{\bar{A}}(0).$$

Wegen der Stetigkeit von $f_A(t)$ gilt diese Beziehung für alle $t > 0$, auch für die Schnittpunktabszissen $t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Analog beweist man für $t > 0$ mit Benützung der Geradenfolge $\{g_n^-\}$:

$$\frac{f_{\bar{A}}(t) - f_{\bar{A}}(0)}{t} \leqq f'_{\bar{A}}(0).$$

Damit hat man für $t > 0$ in $(-\varrho, \varrho)$:

$$\frac{f_{\bar{A}}(t) - f_{\bar{A}}(0)}{t} = f'_{\bar{A}}(0)$$

oder

$$f_{\bar{A}}(t) = f_{\bar{A}}(0) + t \cdot f'_{\bar{A}}(0) \text{ für } 0 < t < \varrho.$$

Das heißt: Die Gerade $g_{\bar{A}}, f_{\bar{A}(0)}, f_{\bar{A}(0)}$ gehört für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) und hat die in 133221 unter Fall A beschriebene Eigenschaft. In 133222 wurde aber vorausgesetzt, daß es eine Gerade mit der unter Fall A beschriebenen Eigenschaft unter den für $\bar{A}$ zu (ε, ϱ) gehörenden Geraden nicht geben soll. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt.

133226. Damit ist die in 13313 aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen. Da A^* ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_{m-1}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$ ist, ist damit auch die in 1132 aufgestellte Bedingung als hinreichend erwiesen.

14. **Verhalten „im allgemeinen“** eines Hyperflächenpunktes hinsichtlich des Berührungsgrades der Tangenten und der Auflösbarkeit ihres Berührungspunktes.

141. Dazu erklären wir zunächst, was wir unter der Formulierung „im allgemeinen“ verstehen.

1411. Es sei $n \geqq 1$, $k \geqq 1$, $s \geqq 1$. Ferner sei $\mathfrak{S}$ ein System von n Gleichungen mit k Unbekannten. Die Koeffizienten von $\mathfrak{S}$ seien Polynome der s Veränderlichen[6]) $a_1, \ldots, a_s$ mit Koeffizienten aus einem Körper K.

1412. **Definition.** Wir sagen das System $\mathfrak{S}$ habe im allgemeinen keine nichttriviale Lösung, wenn mindestens ein nicht identisch verschwindendes Polynom der s Veränderlichen $a_1, \ldots, a_s$ mit Koeffizienten aus K existiert, das für jede spezielle Wahl der Veränderlichen $a_1, \ldots, a_s$, für die das System $\mathfrak{S}$ eine nichttrivale Lösung hat, notwendig den Wert Null annehmen muß.

1413. Wir sagen allgemeiner von einem beliebigen Sachverhalt, er trete im allgemeinen nicht ein, wenn zu seinem Eintreten die Existenz einer nichttrivialen Lösung von mindestens einem unter höchstens endlich vielen solchen Systemen $\mathfrak{S}$ notwendig ist, die im allgemeinen keine nichttriviale Lösung haben.

1421. Über Systeme von homogenen Gleichungen gilt folgender Satz: Ein System von homogenen Gleichungen mit unbestimmten Koeffizienten besitzt ein Resultantensystem aus gaznzahligen Polynomen in diesen Koeffizienten so, daß für spezielle Werte[7]) der Koeffizienten das Nullwerden aller Resultanten notwendig und hinreichend ist für die Existenz einer nichttrivialen Lösung des Gleichungssystems.

Man sagt, ein solches Resultantensystem liefere ein algebraisches Kriterium für die nichttriviale Lösbarkeit des Gleichungssystems. Für den Beweis des Satzes sei auf die Literatur verwiesen[7]).

1422. Wir werden zeigen, daß eine Tangente an eine Hyperfläche vom Berührungsgrad l, wobei $2 \leqq l \leqq k+1$ sein soll, im allgemeinen eine Auflösungsmatrix vom Rang $l-1$ hat. Dazu betrachten wir für einen Punkt P^* des Bereiches $\mathfrak{B}$ das Gleichungssystem

---

[6]) S. V. 14, 1. Teil, S. 51.
[7]) S. V. 14, 2. Teil, S. 9.

$$h_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(2)} f(P^*) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\mathfrak{S}) \qquad h_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(l)} f(P^*) = 0,$$

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial h_l}{\partial \alpha_k} \end{pmatrix} < l-1.$$

Die letzte Forderung ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden aller $(l-1)$-reihigen Unterdeterminanten der Matrix, also mit $\binom{k}{l-1}$ homogenen Gleichungen.

Das System $\mathfrak{S}$ von insgesamt $(l-1) + \binom{k}{l-1}$ homogenen Gleichungen mit den Unbekannten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ hat, wenn man die sich nur durch die Reihenfolge der Differentiationen voneinander unterscheidenden partiellen Ableitungen von $f(P)$ als identisch ansieht, die in 1411 geforderten Eigenschaften. Denn die partiellen Ableitungen von $f(P)$ können im Punkte P^* völlig unabhängig voneinander beliebige Werte annehmen.

1423. **Hilfssatz 4.** *Das Gleichungssystem* $\mathfrak{S}$ *aus* 1422 *hat im allgemeinen keine nichttriviale Lösung.*

Beweis. Wir betrachten ein Resultantensystem von $\mathfrak{S}$, das ein algebraisches Kriterium für die Lösbarkeit liefert. Da die Resultanten ganzzahlige Polynome in den Koeffizienten von $\mathfrak{S}$, diese selbst aber Polynome der partiellen Ableitungen von $f(P)$ im Punkte P^* mit ganzzahligen Koeffizienten sind, so sind die Resultanten ebenfalls ganzzahlige Polynome dieser partiellen Ableitungen. Wir zeigen, daß nicht alle Resultanten identisch verschwinden. Da das Verschwinden sämtlicher Resultanten für das Vorliegen einer nichttrivialen Lösung von $\mathfrak{S}$ hinreichend ist, ist dies getan, wenn es gelingt, für die partiellen Ableitungen solche speziellen Werte einzusetzen, daß das entstehende Gleichungssystem keine nichttriviale Lösung hat. Da das Verschwinden aller Resultanten für das Vorliegen einer nichttrivialen Lösung auch notwendig ist, ist eine solche nicht identisch verschwindende Resultante ein Polynom mit den in 1412 geforderten Eigenschaften. Damit ist dann alles gezeigt.

Ein spezielles System, das nur die triviale Lösung hat, erhalten wir aus $\mathfrak{S}$, indem wir die rein partiellen Ableitungen gleich 1, die gemischt partiellen Ableitungen gleich 0 setzen. Das System $\mathfrak{S}$ geht dadurch über in

$$\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1^l + \cdots + \alpha_k^l = 0,$$

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{l-1} & \cdots & \alpha_1^{l-1} \end{pmatrix} < l-1.$$

Diesen Forderungen genüge das Zahlensystem $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k)$. Aus der Forderung über den Rang der Matrix folgt, daß höchstens $l-2$ der Größen $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k$ zu je zweien

und von Null verschieden sein können. Es seien unter den $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ genau s und zwar o. B. d. A. $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_s$ zu je zweien und von Null verschieden. Dabei komme der Wert von $\bar{\alpha}_\sigma$ unter den $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k$ genau c_σ-mal vor ($\sigma = 1, \ldots, s$; $c_\sigma \geqq 1$). Dann hat man:

$$\begin{aligned} c_1\bar{\alpha}_1^2 + \cdots + c_s\bar{\alpha}_s^2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_1\bar{\alpha}_1^{s+1} + \cdots + c_s\bar{\alpha}_s^{s+1} &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{vmatrix} \bar{\alpha}_1^2 & \ldots & \bar{\alpha}_s^2 \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \bar{\alpha}_1^{s+1} & \ldots & \bar{\alpha}_s^{s+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Das heißt, die Größen $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_s$ sind nicht zu je zweien und von Null verschieden im Widerspruch zur Bedeutung von s. Also hat das System nur die triviale Lösung. Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

143. Auf Grund von Hilfssatz 4 definieren wir:

1431. **Außergewöhnlicher Punkt der Stufe** l. Es sei $2 \leqq l \leqq k+1$. Einen Punkt (P^*, y^*) der Hyperfläche, für den das in 1422 definierte Gliechungssystem $\mathfrak{S}$ eine reelle oder komplexe nichttrivale Lösung hat, nennen wir einen außergewöhnlichen Punkt der Stufe l. Ein Punkt kann ein außergewöhnlicher Punkt von mehr als einer Stufe sein, wie leicht zu konstruierende Beispiele zeigen.

1432. **Gewöhnlicher Punkt.** Einen Punkt (P^*, y^*) der Hyperfläche, der nicht außergewöhnlicher Punkt von mindestens einer der Stufen $2, \ldots, k+1$ ist, nennen wir einen gewöhnlichen Punkt. Aus 1413 und Hilfssatz 4 folgt sofort: *Ein Hyperflächenpunkt ist im allgemeinen ein gewöhnlicher Punkt.* (Man vgl. dazu den algebraischen Charakter unseres Begriffes „im allgemeinen“).

1441. **Hauptsatz über gewöhnliche Punkte.** *Jede Tangente an eine Hyperfläche in einem gewöhnlichen Punkte hat einen Berührungsgrad l, für den $1 \leqq l \leqq k$ gilt. Ihr Berührungspunkt läßt sich in höchstens $l+1$ verschiedene gemeinsame Punkte auflösen und, bei geeignetem Vorgehen, auch in genau $l+1$.*

Beweis. Wir beweisen den ersten Teil der Behauptung, indem wir zeigen, daß es eine Tangente mit dem Mindestberührungsgrad $k+1$ in einem gewöhnlichen Punkte nicht geben kann. Wir nehmen an, es gebe eine solche. Dann hätte das Gleichungssystem

$$h_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0, \ldots, h_{k+1}(\alpha_1 \ldots \alpha_k) = 0$$

eine nichttriviale Lösung $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$. Nach dem Satz von Euler über homogene Funktionen ist aber:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_k}\alpha_k &= 2h_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial h_{k+1}}{\partial \alpha_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial h_{k+1}}{\partial \alpha_k} &= (k+1)h_{k+1}. \end{aligned}$$

Setzt man für $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ die nichttriviale Lösung $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*$ des Systems $h_2 = 0, \ldots, h_{k+1} = 0$ ein, so werden die rechten Seiten zu Null und die Determinante der Matrix $\mathfrak{M}_{k+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ muß daher verschwinden. Das heißt der betrachtete Punkt wäre ein außergewöhnlicher Punkt von der Stufe $k+1$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich ohne weiteres aus der notwendigen

Bedingung von 1131 und der hinreichenden Bedingung von 1132. Denn die Auflösungsmatrix einer Tangente vom Berührungsgrad l in einem gewöhnlichen Punkte ist auf Grund der Definition des gewöhnlichen Punktes vom Rang $l-1$.

1442. Wir betrachten noch kurz die außergewöhnlichen Punkte. Es gilt folgender

Satz. *Dann und nur dann ist ein Hyperflächenpunkt ein außergewöhnlicher Punkt von der Stufe* 2, *wenn für ihn gilt:*

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| = 0; \quad i,j = 1,\ldots,k.$$

Beweis. Ist der Punkt ein außergewöhnlicher Punkt von der Stufe 2, so hat das System von k linearen Gleichungen mit k Unbekannten

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_j = 0, \quad i = 1,\ldots,k,$$

eine nichttriviale Lösung. Also ist die Bedingung notwendig. Ist umgekehrt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$, so hat das betrachtete lineare Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung, und für diese bekommt man mit Benützung des Satzes von Euler über homogene Funktionen:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_j \right) \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_i} \alpha_i = h_2.$$

Also ist der Punkt ein außergewöhnlicher Punkt der Stufe 2, die Bedingung ist hinreichend.

Für $k = 2$ folgt daraus, daß die außergewöhnlichen Punkte der Stufe 2 identisch sind mit den durch die Bedingung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 0$ gekennzeichneten parabolischen Punkten. Wir nennen deshalb für $k > 2$ einen außergewöhnlichen Punkt der Stufe 2 auch einen parabolischen Punkt im verallgemeinerten Sinne.

Ist $k = 2$, so haben die nur aus parabolischen Punkten bestehenden Flächen die Eigenschaft, daß durch jeden ihrer Punkte wenigstens eine ganz in der Fläche verlaufende Gerade geht[8]). Man kann sich überhaupt die Aufgabe stellen, die Hyperflächen zu erforschen, die nur aus außergewöhnlichen Punkten einer bestimmten Stufe bestehen. Für $k = 2$ und die Stufe 3 ergeben sich ebenfalls die Flächen, die gerade Linien enthalten[9]). Es bleibt zu untersuchen, ob sich für beliebige k und l ähnlich einfache geometrische Aussagen machen lassen, wie für $k = 2$ und $l = 2, 3$.

15. Ordnungsgeometrische Aussagen. Unsere bisherigen Ergebnisse setzen uns in den Stand, über gewöhnliche Hyperflächenpunkte ordnungsgeometrische Aussagen zu machen. Der Ordnungsbegriff wird sich dabei als äußerst fruchtbar erweisen, denn aus ihm wird eine weitgehende Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix unmittelbar hervorgehen, die ohne jede Differenzierbarkeitsvoraussetzung auf geometrischem Wege gewonnen werden kann.

151. Für die Definition der Mindestordnung und der Ordnung eines Hyperflächenpunktes, sowie der Grenzcharakteristik der Mindestordnung und der Ordnung m verzichten wir auf die in 1111, 2. über $y = f(P)$ formulierten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen. Wir machen aber über $y = f(P)$ eine neue Voraussetzung.

---

[8]) S. V. 12, S. 225.
[9]) S. V. 7, S. 183, 184.

1511. Um zu erreichen, daß wir nur sog. „starke" Ordnung[10]) zu betrachten haben, wollen wir $y = f(P)$ der folgenden Bedingung unterwerfen:

Es sei P^* ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{B}$ und r der Radius einer ganz in $\mathfrak{B}$ liegenden, k-dimensionalen, offenen Kugel mit dem Mittelpunkt P^*. Dann soll folgendes erfüllt sein: Es gibt ein ϱ^* mit $0 < \varrho^* \leqq \frac{r}{2}$ derart, daß für jedes ϱ mit $0 < \varrho \leqq \varrho^*$ jede Gerade g, gegeben durch

$$x_1 = x_1^{(0)} + \alpha_1 t, \ldots, x_k = x_k^{(0)} + \alpha_k t, y = y^{(0)} + \beta t \text{ mit } \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 = 1,$$

für die $|x_1^{(0)} - x_1^*| < \varrho, \ldots, |x_k^{(0)} - x_k^*| < \varrho$ ist, die Eigenschaft hat, daß die wegen $\varrho \leqq \frac{r}{2}$ im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ mit Sicherheit erklärte Funktion

$$\psi(t) = f(x_1^{(0)} + \alpha_1 t, \ldots, x_k^{(0)} + \alpha_k t) - (y^{(0)} + \beta t)$$

in diesem Intervall höchstens endlich viele verschiedene Nullstellen besitzt. Wir werden in 1522 sehen, daß diese Bedingung in jedem gewöhnlichen Punkte erfüllt ist.

1512. **Mindestordnung.** Wir sagen von jedem Hyperflächenpunkte, er habe die Mindestordnung 1. Ist $m \geqq 2$, so sagen wir von dem Hyperflächenpunkte (P^*, y^*), er habe die Mindestordnung m, wenn folgendes gilt:

Zu jedem ϱ mit $0 < \varrho \leqq \frac{r}{2}$ gibt es eine Gerade g, gegeben durch

$$x_1 = x_1^{(0)} + \alpha_1 t, \ldots, x_k = x_k^{(0)} + \alpha_k t, y = y^0 + \beta t, \text{ mit } \alpha_1^2 + \quad + \alpha_k^2 = 1,$$

die folgende Eigenschaften hat:

1. $$|x_1^{(0)} - x_1^*| < \varrho, \ldots, |x_k^{(0)} - x_k^*| < \varrho.$$

2. Die wegen $\varrho \leqq \frac{r}{2}$ im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ mit Sicherheit erklärte Funktion

$$\psi(t) = f(x_1^{(0)} + \alpha_1 t, \ldots, x_k^{(0)} + \alpha_k t) - (y_0 + \beta t)$$

hat in diesem Intervall mindestens m verschiedene Nullstellen. Von einer Geraden g die diese Eigenschaft hat, sagen wir: g gehöre zu ϱ in bezug auf die Mindestordnung m.

1513. **Ordnung.** Hat die Menge der Mindestordnungen eines Hyperflächenpunktes ein größtes Element, so nennen wir dieses größte Element die Ordnung des Hyperflächenpunktes. Hat diese Menge kein größtes Element, so sagen wir die Ordnung des Hyperflächenpunktes sei nicht beschränkt.

1514. **Charakteristik und Charakteristikensystem.** Das System aller Geraden des $(k+1)$-dimensionalen Raumes der Punkte $(x_1, \ldots, x_k, y)$ nennen wir das unserem Ordnungsbegriff zugrunde liegende Charakteristikensystem, eine einzelne Gerade eine Ordnungscharakteristik.

1515. **Grenzcharakteristik der Mindestordnung m.** Unter einer Grenzcharakteristik der Mindestordnung 1 des Punktes (P^*, y^*) verstehen wir jede durch (P^*, y^*) gehende Gerade. Ist $m \geqq 2$, so benötigen wir zur Definition den Begriff der Grenzgeraden einer Geradenfolge.

Es sei $\{g_n\}$ eine Geradenfolge und g^* gegeben durch

[10]) S. V. 9.

$$x_1 = x_1^* + \alpha_1^* t, \ldots, x_k = x_k^* + \alpha_k^* t,\ y = y^* + \beta^* t, \text{ mit } \alpha_1^{*2} + \cdots + \alpha_k^{*2} = 1.$$

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} g_n = g^*$, wenn g_n dargestellt werden kann durch

(3) $x_1 = x_1^{(n)} + \alpha_1^{(n)} t, \ldots, x_k = x_k^{(n)} + \alpha_k^{(n)} t,\ y = y^{(n)} + \beta^{(n)} t$, mit $\alpha_1^{(n)2} + \cdots + \alpha_k^{(n)2} = 1$,

wobei

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = x_1^*, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^*, \lim_{n\to\infty} y^{(n)} = y^*,$$
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_1^{(n)} = \alpha^*, \ldots, \lim_{n\to\infty} \alpha_k^{(n)} = \alpha_k^*, \lim_{n\to\infty} \beta^{(n)} = \beta^*.$$

Es sei $\{g_n\}$ eine Geradenfolge und g^* gegeben durch

$$x_1 = x_1^*, \ldots, x_k = x_k^*,\ y = y^* + t.$$

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} g_n = g^*$, wenn g_n dargestellt werden kann durch (3) wobei

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = x_1^*, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^*,\ \lim_{n\to\infty} \beta^{(n)} = \infty.$$

Folgen, in denen Elemente vorkommen, die auf dem Raum der Punkte P senkrecht stehen, brauchen wir hier nicht zu betrachten.

Nun sei $m \geqq 2$. Wir nennen eine Gerade g eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung m des Hyperflächenpunktes (P^*, y^*), wenn sie Grenzgerade einer Geraden folge $\{g_n\}$ ist, mit der Eigenschaft:

Zu jedem ϱ mit $0 < \varrho \leqq \frac{r}{2}$ gibt es ein N so, daß für $n \geqq N$ die Gerade g_n in bezug auf die Mindestordnung m zu ϱ gehört.

Aus dieser Definition folgt ohne Mühe: Ist $m \geqq 2$, so ist jede Grenzcharakteristik der Mindestordnung m zugleich eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung $m-1$. Insbesondere geht jede Grenzcharakteristik der Mindestordnung 2 durch den Punkt (P^*, y^*), ist also eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung 1.

1516. **Grenzcharakteristik der Ordnung m.** Es sei $m \geqq 1$. Unter einer Grenzcharakteristik der Ordnung m eines Hyperflächenpunktes verstehen wir jede Grenzcharakteristik der Mindestordnung m dieses Punktes, die nicht zugleich Grenzcharakteristik der Mindestordnung $m+1$ dieses Punktes ist.

1517. **Satz 1.** *Notwendig und hinreichend für das Vorliegen der Mindestordnung $m \geqq 1$ im Punkte (P^*, y^*) ist die Existenz einer Grenzcharakteristik der Mindestordnung m in diesem Punkte.*

Beweis. Der Satz ist trivial für $m = 1$. Wir beweisen ihn für $m \geqq 2$. Die Bedingung ist notwendig: Wir betrachten die Zahlenfolge $\{\varrho_n\}$ mit $\varrho_n = \frac{r}{2^n}$. Aus dem Vorliegen der Mindestordnung m folgt, daß es zu jedem $n \geqq 1$ eine Gerade g_n gibt, die in bezug auf m zu ϱ_n gehört. g_n sei gegeben durch (3), wobei

$$|x_1^{(n)} - x_1^*| < \varrho_n, \ldots, |x_k^{(n)} - x_k^*| < \varrho_n.$$

Daraus folgt: $\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = x_1^*, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^*$. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall. Die zur Folge $\{g_n\}$ gehörige Folge $\{\beta^{(n)}\}$ ist beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge $\{g_s\}$ von $\{g_n\}$, für die

$$\lim_{s\to\infty} \alpha_1^{(s)} = \alpha_1^*, \ldots, \lim_{s\to\infty} \alpha_k^{(s)} = \alpha_k^*, \lim_{s\to\infty} \beta^{(s)} = \beta^*; \alpha_1^{*2} + \cdots + \alpha_k^{*2} = 1,$$

gilt. Nun sei τ_s eine der beiden in $(-\varrho_s, \varrho_s)$ sicher vorhandenen Nullstellen der Funktion

$\psi_s(t) = f(x_1^{(s)} + \alpha_1^{(s)}t, \ldots, x_k^{(s)} + \alpha_k^{(s)}t) - (y^{(s)} + \beta^{(s)}t)$. Dann gilt $\lim_{s\to\infty} \tau_s = 0$ und aus $\psi_s(\tau_s) = 0$ folgt $\lim_{s\to\infty} \psi_s(\tau_s) = 0$. Nun ist aber andererseits

$$\lim_{s\to\infty} \psi_s(\tau_s) = f(x_1^*, \ldots, x_k^*) - \lim_{s\to\infty} y^{(s)}.$$

Daraus folgt $\lim_{s\to\infty} y^{(s)} = y^*$. Man hat also: Versteht man unter g^* die Gerade

$$(4) \qquad x_1 = x_1^* + \alpha_1^* t, \ldots, x_k = x_k^* + \alpha_k^* t, \; y = y^* + \beta^* t,$$

so gilt: $\lim_{s\to\infty} g_s = g^*$.

Ist nun ϱ gegeben und $0 < \varrho \leqq \frac{r}{2}$, so kann man S so bestimmen, daß $\varrho_s < \varrho$ für $s \geqq S$ gilt. Dann gehört g_s für $s = S$ in bezug auf m zu ϱ. Damit ist gezeigt, daß g^* eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung m ist.

2. Fall. Die Folge $\{\beta^{(n)}\}$ ist nicht beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge $\{g_s\}$, für die $\lim_{s\to\infty} \beta^{(s)} = \pm\infty$ gilt. Daraus folgt: Versteht man unter g^* die Gerade

$$x_1 = x_1^*, \ldots, x_k = x_k^*, \; y = y^* + t,$$

so gilt: $\lim_{s\to\infty} g_s = g^*$. Auch hier gibt es zu jedem ϱ mit $0 < \varrho \leqq \frac{r}{2}$ ein S so, daß g_s für $s \geqq S$ in bezug auf m zu ϱ gehört. Also ist g^* eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung m.

Die Bedingung ist hinreichend: Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Grenzcharakteristik und der Definition der Mindestordnung.

152. Im folgenden sollen wieder die in 111, 2. formulierten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über $y = f(P)$ als gültig angenommen werden. Dann gilt folgender Satz:

1521. **Satz 2.** *Es sei $m \geqq 2$. Eine Grenzcharakteristik g^* der Mindestordnung m des Punktes (P^*, y^*) ist eine Tangente an die Hyperfläche in diesem Punkte, deren Berührungspunkt sich in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen läßt.*

Beweis. Wir beweisen zunächst: g^* ist Tangente im Punkte (P^*, y^*). Da $g^* = \lim_{n\to\infty} g_n$, wobei g_n durch (3) gegeben ist, so folgt: $x_1^{(n)} \to x_1^*, \ldots, x_k^{(n)} \to x_k^*$. Weiter gibt es eine Teilfolge $\{g_s\}$ von $\{g_n\}$ mit $\alpha_1^{(s)} \to \alpha^*, \ldots, \alpha_k^{(s)} \to \alpha_k^*$. Für $\{g_s\}$ gilt auch: Zu jedem ϱ mit $0 < \varrho < \frac{r}{2}$ gibt es ein S, so daß für $s \geqq S$ die in $(-\varrho, \varrho)$ mit Sicherheit erklärte Funktion

$$\psi(t) = f(x_1^{(s)} + \alpha_1^{(s)}t, \ldots, x_k^{(s)} + \alpha_k^{(s)}t) - (y^{(s)} + \beta^{(s)}t)$$

in diesem Intervall mindestens zwei Nullstellen τ_1 und τ_2 besitzt. Daraus folgt aber:

$$0 = \psi(\tau_1) - \psi(\tau_2) = [f(x_1^{(s)} + \alpha_1^{(s)}\tau_1, \ldots, x_k^{(s)} + \alpha_k^{(s)}\tau_1) - (y^{(s)} + \beta^{(s)}\tau_1)]$$
$$- [f(x_1^{(s)} + \alpha_1^{(s)}\tau_2, \ldots, x_k^{(s)} + \alpha_k^{(s)}\tau_2) - (y^{(s)} + \beta^{(s)}\tau_2)],$$

$$\beta^{(s)} = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}[f(x_1^{(s)} + \alpha_1^{(s)}\tau_1, \ldots, x_k^{(s)} + \alpha_k^{(s)}\tau_1 - f(x_1^{(s)} + \alpha_1^{(s)}\tau_2, \ldots, x_k^{(s)} + x_k^{(s)}\tau_2)].$$

Da man ϱ beliebig klein wählen kann, folgt daraus:

$$\lim_{s\to\infty} \beta^{(s)} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^* + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^*\right)^{(1)} f(P^*) = \beta^*.$$

Da somit $\beta^{(s)}$ beschränkt ist, folgt wie in 1517, Fall 1: $\lim_{s\to\infty} y^{(s)} = y^*$.

Also ist g^* die Tangente (4) mit $\alpha_1^{*2} + \cdots + \alpha_k^{*1} = 1$ und

$$y^* = f(x_1^*, \ldots, x_k^*), \quad \beta^* = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^* + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^*\right)^{(1)} f(P^*).$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Daß sich der Berührungspunkt von g^* in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen läßt, folgt unmittelbar aus der Definition der Grenzcharakteristik und des Begriffes der Auflösung.

1522. Wir wollen nun speziell gewöhnliche Punkte betrachten und zeigen, daß in diesen Punkten die in 1511 formulierte Bedingung stets erfüllt ist. Wir haben diese Bedingung bisher noch nirgends benutzt, weder zu einer Definition noch zu einem Beweise. Da wir uns auf die Betrachtung der starken Ordnung beschränken, wollen wir aber nur in solchen Punkten die Ordnung als erklärt ansehen, die diese Bedingung erfüllen. Damit schließen wir unter anderem den Fall aus, daß der betrachtete Punkt auf einer ganz in der Hyperfläche liegenden Strecke liegt.

In diesem Abschnitt 1522 wollen wir aber auf diese Bedingung verzichten und trotzdem unsere Definitionen aufrechterhalten. Wir nehmen an, die Bedingung aus 1511 gelte in einem gewöhnlichen Punkte nicht. Dann ist $k+2$ eine Mindestordnung dieses Punktes. Nach Satz 1 gibt es dann eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung $k+2$ in diesem Punkte. Nach Satz 2 ist dies eine Tangente, deren Berührungspunkt sich in mindesten $k+2$ gemeinsame Pnukte auflösen läßt. Nach der notwendigen Bedingung aus 1131 ist sie also eine Tangente vom Mindestberührungsgrad $k+1$. Eine solche gibt es aber in einem gewöhnlichen Punkte nicht. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt.

1523. Damit haben wir den

Satz 3. *In einem gewöhnlichen Punkte ist die Ordnung erklärt, beschränkt, mindestens gleich* 2 *und höchstens gleich* $k+1$.

1524. **Satz 4.** *Es sei* $2 \leqq m \leqq k+1$. *In einem gewöhnlichen Punkte ist jede Grenzcharakteristik der Mindestordnung* m *eine Tangente vom Mindestberührungsgrad* $m-1$ *und umgekehrt.*

Beweis. Der erste Teil des Satzes wird bewiesen, wie es für $m = k+2$ in 1522 geschehen ist. Der zweite Teil folgt aus der Tatsache, daß man in einem gewöhnlichen Punkte den Berührungspunkt einer Tangente vom Berührungsgrad $m-1$ in m verschiedene, gemeinsame Punkte auflösen kann, und aus den Definitionen der Auflösung und der Grenzcharakteristik.

1525. Um in einem gewöhnlichen Punkte die Gesamtheit der Grenzcharakteristiken der Mindestordnung m mit $2 \leqq m \leqq k+1$ durch Rechnung zu bestimmen, hat man nach Satz 4 die Gesamtheit der Tangenten vom Mindestberührungsgrad $m-1$ zu bestimmen. Diese Aufgabe läuft im wesentlichen auf die Bestimmung der gemeinsamen, reellen, nichttrivialen Lösungen der ersten $m-1$ Gleichungen des Systems $\mathfrak{S}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_1\right)^{(2)} f(P^*) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(k)} f(P^*) = 0$$

hinaus. Die Bestimmung der Ordnung läuft auf die Bestimmung des größten Index l hinaus, für den die ersten l Gleichungen des Systems $\mathfrak{S}$ eine gemeinsame, reelle, nichttriviale Lösung haben. Die gesuchte Ordnung ist dann $l + 1$.

1526. Auf Grund dieser Feststellungen definieren wir:

Affin verallgemeinerte Dupinsche Indikatrix. Das Gleichungssystem $\mathfrak{S}$ aus 1525 nennen wir die affin verallgemeinerte Dupinsche Indikatrix des Hyperflächenpunktes (P^*, y^*). Den größten Index l, für den die ersten l Gleichungen dieses Systems eine gemeinsame, reelle, nichttriviale Lösung haben, nennen wir ihren **Lösbarkeitsindex.** Der Punkt (P^*, y^*) braucht dabei kein gewöhnlicher Punkt zu sein.

Für gewöhnliche Punkte gilt jedoch nach Satz 1 und Satz 4 der

Hauptsatz über die affin verallgemeinerte Dupinsche Indikatrix. *In einem gewöhnlichen Punkte ist der um* 1 *vermehrte Lösbarkeitsindex der affin verallgemeinerten Dupinschen Indikatrix gleich der genauen Ordnung des Punktes:*

Die affin verallgemeinerte Dupinsche Indikatrix geht für

$$k = 2, \frac{\partial f(P^*)}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f(P^*)}{\partial x_2} = 0$$

in den Grenzfall der gewöhnlichen Dupinschen Indikatrix über.

1531. Unter wesentlicher Benützung des Ordnungsbegriffes kann man auf rein geometrischem Wege unter Vermeidung jeglicher Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zu einer Indikatrix für einen Hyperflächenpunkt kommen, die für gewöhnliche Punkte in einem bestimmten Sinne (vgl. 1533) genau der affin verallgemeinerten Dupinschen Indikatrix entspricht. Für ihre Definition verzichten wir wieder auf die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen aus 1111, 2., verlangen aber das Erfülltsein der Bedingung aus 1511.

Ordnungsgeometrische Indikatrix. Es sei $m \geqq 1$. Wir betrachten in einem Hyperflächenpunkte die Menge aller Grenzcharakteristiken der Mindestordnung m und bezeichnen sie mit M_m. Es gilt $M_{m+1} < M_m$. Dabei ist M_1 nicht leer. Wir schreiben die Mengenfolge $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_m, \ldots$ an, soweit sie aus nichtleeren Mengen besteht, und bezeichnen sie mit J. Dann nennen wir

$$J = (M_1, M_2, \ldots)$$

die ordnungsgeometrische Indikatrix des betrachteten Hyperflächenpunktes. Ist die Mengenfolge J endlich, so nennen wir den Index der letzten Menge die **Länge** der ordnungsgeometrischen Indikatrix, ist sie nicht endlich, so sagen wir die Länge der ordnungsgeometrischen Indikatrix sei nicht beschränkt.

1532. Wir können den Satz 1 (1517) anwenden, da zu seinem Beweise keinerlei Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über $y = f(P)$ benutzt wurden, und bekommen damit den folgenden Satz:

Hauptsatz über die ordnungsgeometrische Indikatrix. *Ist die Ordnung eines Hyperflächenpunktes beschränkt, so ist sie gleich der Länge seiner Indikatrix. Ist sie nicht beschränkt, so ist auch die Länge der Indikatrix nicht beschränkt.*

1533. Nach Satz 4 (1524) und der Definition des Mindestberührungsgrades einer

Tangente entsprechen für einen gewöhnlichen Punkt die Elemente der Menge M_m umkehrbar eindeutig den gemeinsamen, reellen, nichttrivialen Lösungen der ersten $m-1$ Gleichungen der affin verallgemeinerten Dupinschen Indikatrix. In diesem Sinne entspricht die ordnungsgeometrische Indikatrix in einem gewöhnlichen Punkt genau der affin verallgemeinerten Dupinschen Indikatrix.

§ 2. Die verallgemeinerte ordnungsgeometrische Indikatrix.

21. Die Überlegungen des § 1 haben uns zu der Definition einer ordnungsgeometrischen Indikatrix für einen Punkt eines Hyperflächenstückes im n-dimensionalen Euklidischen Raum geführt. Dabei wurde über den betrachteten Punkt des Hyperflächenstückes lediglich die in 1511 formulierte Voraussetzung gemacht. Irgendwelche Differenzierbarkeitsvoraussetzungen waren dagegen zur Definition dieser ordnungsgeometrischen Indikatrix nicht nötig.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß der Begriff dieser ordnungsgeometrischen Indikatrix einer weitgehenden Verallgemeinerung fähig ist. Wir werden dabei den n-dimensionalen Euklidischen Raum, das Hyperflächenstück und das System der Ordnungscharakteristiken durch wesentlich allgemeinere Begriffe ersetzen.

211. Die im § 1 gewonnene ordnungsgeometrische Indikatrix beruht wesentlich auf dem Ordnungsbegriff. Wir werden daher zunächst versuchen, unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen einen Ordnungsbegriff aufzustellen.

2111. Wir machen dabei Gebrauch von folgender Definition:

Definition des schwächsten Umgebungsraumes. Eine Menge $\mathfrak{A}$ von irgendwelchen beliebigen Elementen, die wir „Punkte" nennen wollen, soll ein „schwächster Umgebungsraum" heißen, wenn für jeden Punkt P von A und jede Teilmenge A' von A feststeht, ob A' als Umgebung von P angesehen werden soll oder nicht[11]).

2112. **Verallgemeinerung des E_n.** Es sei $\mathfrak{R}$ ein schwächster Umgebungsraum, in dem außerdem das folgende Axiom erfüllt sein soll:

Axiom A 1. Zu jedem Punkt P von $\mathfrak{R}$ gibt es wenigstens eine Umgebung $\mathfrak{U}_P$.

Diesen Raum $\mathfrak{R}$ nehmen wir als Verallgemeinerung des n-dimensionalen Euklidischen Raumes und werden sehen, daß wir in diesem sehr allgemeinen Raume einen Ordnungsbegriff erklären können, der den Ordnungsbegriff des § 1 als Spezialfall enthält.

2113. **Verallgemeinerung des Hyperflächenstücks.** Als Verallgemeinerung des Hyperflächenstücks im n-dimensionalen Euklidischen Raum nehmen wir eine beliebige Punktmenge $\mathfrak{M}$ des Raumes $\mathfrak{R}$.

2114. **Verallgemeinerung des Charakteristikensystems.** Ein verallgemeinertes System von Ordnungscharakteristiken gewinnen wir in folgender Weise:

Es sei $\mathfrak{B}$ irgendeine Punktmenge im Raume $\mathfrak{R}$. Ist T eine eindeutige Abbildung dieser Menge $\mathfrak{B}$ auf die Menge $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{R}$, so schreiben wir $\mathfrak{B}' = T(\mathfrak{B})$. Wird dabei der Punkt P von $\mathfrak{B}$ abgebildet auf den Punkt P' von $\mathfrak{B}'$, so schreiben wir $P' = T(P)$.

Nun betrachten wir ein System $\mathfrak{T}$ von solchen eindeutigen Abbildungen der Menge $\mathfrak{B}$. Den durch die Abbildungen T aus $\mathfrak{T}$ erzeugten Bildmengen $T(\mathfrak{B})$ der Urbildmenge $\mathfrak{B}$ wollen wir die Rolle der Ordnungscharakteristiken zuweisen. Die Gesamtheit der Mengen $T(\mathfrak{B})$ für alle T aus $\mathfrak{T}$ soll also unser **Charakteristikensystem** sein; die Menge $\mathfrak{B}$ wollen

[11]) S. V. 1, S. 160.

wir seine **Basis** nennen, $\mathfrak{R}$ sein **erzeugendes System.** Dabei kann es natürlich vorkommen, daß zwei verschiedene Abbildungen ein und dieselbe Ordnungscharakteristik liefern, denn bei verschiedenen Abbildungen T_1 und T_2 können sehr wohl die Mengen $T_1(\mathfrak{B})$ und $T_2(\mathfrak{B})$ identisch sein.

2115. Um nun bezüglich dieses Charakteristikensystems zu einem Ordnungsbegriff zu gelangen, fassen wir einen festen Punkt P der Menge $\mathfrak{M}$ und einen festen Punkt Q der Basis $\mathfrak{B}$ ins Auge. Wir machen folgende Voraussetzung, die der Bedingung in 1511 entspricht (vgl. dazu 1511):

Es gibt im Raume $\mathfrak{R}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_P$ des Punktes P so, daß für jedes T aus $\mathfrak{R}$ mit $T(Q)\varepsilon\mathfrak{U}_P$ der Durchschnitt der drei Mengen $T(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{U}_P$ aus höchstens endlich vielen Punkten besteht.

2116. **Mindestordnung.** Es sei $\mathfrak{U}_P$ eine Umgebung des Punktes P im Raume $\mathfrak{R}$ und m eine nicht negative, ganze Zahl. Mit $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_P)$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen T aus $\mathfrak{R}$, welche die folgenden beiden Eigenschaften haben:

1. $T(Q)$ ist ein Punkt von $\mathfrak{U}_P$.
2. $\mathfrak{M}$, $T(\mathfrak{B})$ und $\mathfrak{U}_P$ haben wenigstens m verschiedene Punkte gemein.

Nun soll m festgehalten und $\mathfrak{U}_P$ veränderlich gedacht werden. Ist für keine Umgebung $\mathfrak{U}_P$ von P die Menge $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_P)$ leer, so wollen wir m eine Mindestordnung von $P\varepsilon\mathfrak{M}$ in bezug auf $Q\varepsilon\mathfrak{B}$ nennen.

2117. **Ordnung.** Es ist mit zwei Möglichkeiten zu rechnen:

a) Die Mindestordnungen von $P\varepsilon\mathfrak{M}$ in bezug auf $Q\varepsilon\mathfrak{B}$ haben einen endlichen Höchstwert. Wir nennen dann diesen Höchstwert die Ordnung des Punktes $P\varepsilon\mathfrak{M}$ in bezug auf den Punkt $Q\varepsilon\mathfrak{B}$, bezeichnen ihn mit r und schreiben:

$$r = \omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R}).$$

Durch diese Schreibweise ist angedeutet, daß die Ordnung auch von dem Komplex $\mathfrak{R}$ abhängt.

b) Die Mindestordnungen von $P\varepsilon\mathfrak{M}$ in bezug auf $Q\varepsilon\mathfrak{B}$ haben keinen Höchstwert. Wir sagen dann der Punkt $P\varepsilon\mathfrak{M}$ sei in bezug auf den Punkt $Q\varepsilon\mathfrak{B}$ von nicht beschränkter Ordnung.

Im Falle nicht beschränkter Ordnung sagen wir auch: die Ordnung sei größer als jede beschränkte Ordnung, und schreiben $\omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R}) > N$, wobei N eine beliebige, natürliche Zahl sein kann.

Die Voraussetzung aus 2115 wurde bei der Definition der Mindestordnung und der Ordnung nicht benutzt. Wir wollen jedoch, falls nichts anderes ausdrücklich bemerkt ist, diese Begriffe nur dann als erklärt ansehen, wenn die Voraussetzung aus 2115 erfüllt ist.

Es macht keine Mühe sich zu überzeugen, daß der in § 1 benutzte Ordnungsbegriff ein Spezialfall dieses allgemeineren Ordnungsbegriffes ist. Man kommt auf den Spezialfall des § 1, wenn man für $\mathfrak{B}$ eine beliebige Gerade g des E_n setzt, für Q einen beliebigen Punkt dieser Geraden g und als erzeugendes System die Gruppe aller Bewegungen von g im E_n nimmt.

212. Um neben dem verallgemeinerten Ordnungsbegriff nun auch zu einer verallgemeinerten, ordnungsgeometrischen Indikatrix zu gelangen, benötigen wir einen neuen Begriff.

21211. **Definition des schwächsten Häufungsraumes.** Eine Menge $\mathfrak{A}$ von irgendwelchen beliebigen Elementen soll ein „schwächster Häufungsraum" heißen, wenn zu

jedem Element P von $\mathfrak{A}$ und zu jeder Teilmenge $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ feststeht, ob P als Häufungspunkt von $\mathfrak{A}'$ angesehen werden soll oder nicht[11]).

21212. **Abgeschlossene Hülle.** Ist $\mathfrak{T}$ eine Teilmenge des schwächsten Umgebungsraumes $\mathfrak{A}$, so bezeichnen wir die Menge aller Häufungspunkte von $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{H}_{\mathfrak{T}}$.

Unter der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{T}$ versteht man die Menge $\mathfrak{T} + \mathfrak{H}_{\mathfrak{T}}$. Wir schreiben $\mathfrak{T} + \mathfrak{H}_{\mathfrak{T}} = \overline{\mathfrak{T}}$. Man sagt $\mathfrak{T}$ ist abgeschlossen, wenn $\overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}$.

21213. Nun sei der Komplex $\mathfrak{R}$ der Abbildungen $\mathfrak{T}$ ein schwächster Häufungsraum, in dem außerdem das folgende Axiom erfüllt sein soll:

Axiom B 1. Die leere Menge hat keinen Häufungspunkt.

21214. Aus Axiom B 1 und der Definition der abgeschlossenen Hülle folgt

Satz 1. *Die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{T}}$ einer Teilmenge $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann leer, wenn $\mathfrak{T}$ leer ist.*

2122. Die ordnungsgeometrische Indikatrix des § 1 ist ein System von ineinandergeschachtelten Mengen von Grenzcharakteristiken. Wir werden daher zunächst den Begriff der Grenzcharakteristik zu verallgemeinern trachten. Dazu erklären wir den Begriff der Grenzabbildung.

21221. **Grenzabbildung der Mindestordnungen** m. Es seien $P \varepsilon \mathfrak{M}$ (siehe 2113) und $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ (siehe 2114) zwei im weiteren fest angenommene Punkte. Dabei sei die Voraussetzung 2115 erfüllt. Ebenfalls fest vorgegeben sei die nicht negative, ganze Zahl m. Nun betrachten wir für jede Umgebung $\mathfrak{U}_P$ von P die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{T}}(m, \mathfrak{U}_P)$ der Menge $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_P)$ (vgl. 2116). Gehört die Abbildung T_m allen diesen abgeschlossenen Hüllen an, so nennen wir T_m eine Grenzabbildung der Mindestordnung m für den Punkt $P \varepsilon \mathfrak{M}$ in bezug auf den Punkt $Q \varepsilon \mathfrak{B}$. Die durch diese Abbildung T_m erzeugte Ordnungscharakteristik $T_m(B)$ heiße eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung m für den Punkt $P \varepsilon M$ in bezug auf den Punkt $Q \varepsilon B$. Die Menge aller Grenzabbildungen T_m bezeichnen wir mit M_m. Es ist also $M_m = \prod_{\mathfrak{U}_P} \overline{\mathfrak{T}}(m, \mathfrak{U}_P)$.

21222. **Die ordnungsgeometrische Indikatrix.** Wir wollen nun unter der ordnungsgeometrischen Indikatrix des Punktes $P \varepsilon \mathfrak{M}$ in bezug auf den Punkt $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ die Mengenfolge $\{M_m\}$ verstehen und schreiben:

$$J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R}) = (M_0, M_1, M_2, \ldots).$$

Durch diese Schreibweise ist angedeutet, daß die Indikatrix auch von dem Komplex $\mathfrak{R}$ abhängt. Die Mengen M_m wollen wir die **Glieder** der Indikatrix nennen.

2123. Wir wollen den Zusammenhang dieser verallgemeinerten Indikatrix $J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R})$ mit der Ordnung $\omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R})$ betrachten.

Aus der Definition der Mengen M_m, der Definition der Ordnung und aus Axiom B 1 folgt sofort: Ist m der Index einer nicht leeren Menge M_m, so ist $\omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R}) \geqq m$. Ist also die Anzahl der nicht leeren Mengen M_m in $J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R})$ nicht beschränkt, so ist $P \varepsilon \mathfrak{M}$ in bezug auf $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ von nicht beschränkter Ordnung. Ist dagegen diese Anzahl beschränkt, so kann man aus der Indikatrix zunächst nur eine untere Schranke für die Ordnung entnehmen.

2124. Man kann jedoch für den Fall, daß die Anzahl der nicht leeren Mengen M_m beschränkt ist, aus der Indikatrix sogar die genaue Ordnung von $P \varepsilon \mathfrak{M}$ in bezug auf $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ entnehmen, falls man über den Raum $\mathfrak{R}$ (vgl. 2112) und über das System $\mathfrak{R}$ (siehe

2114 und 21221) nur noch einige weitere, naheliegende Voraussetzungen sehr allgemeiner Natur macht.

21241. Für den Raum $\mathfrak{R}$ und damit für den Umgebungsbegriff fordern wir die Gültigkeit eines weiteren Axioms:

Axiom A 2. Zu jedem Punkt P von $\mathfrak{R}$ gibt es wenigstens eine unendliche Folge $\{\mathfrak{U}_n\}$ von nicht notwendig verschiedenen Umgebungen dieses Punktes P mit folgenden beiden Eigenschaften:

1. Für alle n ist $\mathfrak{U}_{n+1} \leqq \mathfrak{U}_n$.

2. Zu jeder beliebigen Umgebung $\mathfrak{U}_P$ von P gibt es stets wenigstens eine Umgebung $\mathfrak{U}_{n^*}$ aus der Folge $\{\mathfrak{U}_n\}$ mit $\mathfrak{U}_{n^*} \leqq \mathfrak{U}_P$.

21242. Für den Komplex $\mathfrak{K}$ fordern wir die Gültigkeit zweier weiterer Axiome.

Axiom B 2. Gilt $\mathfrak{T}_1 \leqq \mathfrak{T}_2$ für zwei Teilmengen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ aus $\mathfrak{K}$, so gilt auch für die abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{T}}_1 \leqq \overline{\mathfrak{T}}_2$.

Axiom B 3. Ist $\{\overline{\mathfrak{T}}_n\}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen aus $\mathfrak{K}$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

1. $\overline{\mathfrak{T}}_{n+1} \leqq \overline{\mathfrak{T}}_n$.

2. Kein Element $\overline{\mathfrak{T}}_n$ der Folge ist leer,

so ist der Durchschnitt der $\overline{\mathfrak{T}}_n$ nicht leer, das heißt, es gibt wenigstens eine Abbildung T, die allen Elementen $\overline{\mathfrak{T}}_n$ der Folge angehört.

21251. Mit Hilfe dieser Axiome beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 2. *Die Glieder M_m der ordnungsgeometrischen Indikatrix bilden eine absteigende Folge, das heißt es gilt $M_{m+1} \leqq M_m$.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß jede Grenzcharakteristik der Mindestordnung $m+1$ zugleich eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung m ist oder, was dasselbe bedeutet, daß jede Grenzabbildung T_{m+1} zugleich eine T_m ist, das heißt, daß jede T_{m+1} der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{T}}(m, \mathfrak{U}_P)$ der für jede beliebige Umgebung $\mathfrak{U}_P$ des Punktes P gebildeten Menge $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_P)$ angehören muß.

Wir betrachten eine Grenzabbildung T_{m+1} und eine Umgebung $\mathfrak{U}_P$ von P. Auf Grund seiner Definition gehört T_{m+1} der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{T}}(m+1, \mathfrak{U}_P)$ der Menge $\mathfrak{T}(m+1, \mathfrak{U}_P)$ an. Auf Grund der Definition der Menge $\mathfrak{T}(m+1, \mathfrak{U}_P)$ und der Menge $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_P)$ (siehe 2116) gilt aber: $\mathfrak{T}(m+1, \mathfrak{U}_P) \leqq \mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_P)$. Nach Axiom B 2 folgt daraus: $\overline{\mathfrak{T}}(m+1, U_P) \leqq \overline{\mathfrak{T}}(m, U_P)$. Daraus und aus $T_{m+1} \varepsilon \overline{\mathfrak{T}}(m+1, U_P)$ folgt dann $T_{m+1} \varepsilon \mathfrak{T}(m, U_P)$, w. z. b. w.

21252. Die **Länge** der Indikatrix. Aus Satz 2 folgt: Ist ein Glied M_m der Indikatrix leer, so sind es auch alle folgenden. Wir wollen festsetzen, daß leere Mengen in der Indikatrix nicht angeschrieben werden sollen und unterscheiden dann folgende Fälle:

a) Eine der Mengen M_m ist leer. Den Index m^* der letzten nicht leeren dieser Mengen nennen wir die Länge der Indikatrix.

b) Keine der Mengen M_m ist leer. Wir sagen dann: die Länge der Indikatrix ist nicht beschränkt.

2126. Nun können wir den für die Indikatrix wesentlichen Satz beweisen:

Hauptsatz über die ordnungsgeometrische Indikatrix. *Ist die Länge der Indikatrix $J(P_{\mathfrak{W}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K})$ beschränkt, so ist sie gleich der Ordnung $\omega(P_{\mathfrak{W}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K})$; ist sie nicht beschränkt, so ist auch die Ordnung $\omega(P_{\mathfrak{W}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K})$ nicht beschränkt.*

Beweis. Fall b): Ist die Länge der Indikatrix nicht beschränkt, so folgt die Behauptung unmittelbar aus 2123.

Fall a): Ist die Länge der Indikatrix beschränkt und gleich m, so ist die Ordnung nach 2123 nicht kleiner als m. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß sie auch nicht größer als m ist. Wir zeigen dies, indem wir folgendes beweisen: Ist m_0 eine Mindestordnung von $P \varepsilon \mathfrak{M}$ in bezug auf $Q \varepsilon \mathfrak{B}$, so ist M_{m_0} nicht leer. Dazu betrachten wir zu dem Punkt P eine unendliche Folge von Umgebungen $\{\mathfrak{U}_n\}$ mit den Eigenschaften des Axioms A 2. Zu den Elementen dieser Folge bilden wir die Mengen $\mathfrak{T}(m_0, \mathfrak{U}_n) = \mathfrak{T}_n$ und erhalten die Mengenfolge $\{\mathfrak{T}_n\}$. Aus der Definition der Mengen $\mathfrak{T}_n$ und aus $\mathfrak{U}_{n+1} \leqq \mathfrak{U}_n$ folgt $\mathfrak{T}_{n+1} \leqq \mathfrak{T}_n$. Nach Axiom B 2 gilt daher auch für die abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{T}}_{n+1} \leqq \overline{\mathfrak{T}}_n$.

Da m_0 eine Mindestordnung ist, ist keine der Mengen $\mathfrak{T}_n$ leer. Nach Satz 1 ist daher auch keine der abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{T}}_n$ leer. Nach Axiom B 3 ist daher auch der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ aller $\overline{\mathfrak{T}}_n$ nicht leer. Nun zeigen wir noch:

$$\mathfrak{D} \leqq M_{m_0}.$$

Dazu haben wir zu zeigen: Ist $\mathfrak{U}_P^{(0)}$ eine beliebige Umgebung von P, so gilt $\mathfrak{D} \leqq \overline{\mathfrak{T}}(m_0, \mathfrak{U}_P^{(0)})$. Nach Axiom A 2 gibt es zu $\mathfrak{U}_P^{(0)}$ ein Element $\mathfrak{U}_{n^*}$ der Folge $\{\mathfrak{U}_n\}$, für das $\mathfrak{U}_{n^*} \leqq \mathfrak{U}_P^{(0)}$ gilt. Daraus folgt: $\mathfrak{T}(m_0, \mathfrak{U}_{n^*}) \leqq \mathfrak{T}(m_0, \mathfrak{U}_P^{(0)})$.

Nach Axiom B 2 gilt $\overline{\mathfrak{T}}(m_0, \mathfrak{U}_{n^*}) \leqq \overline{\mathfrak{T}}(m_0, \mathfrak{U}_P^{(0)})$, und damit folgt aus $\mathfrak{D} \leqq \overline{\mathfrak{T}}(m_0, U_{n^*})$ dann $\mathfrak{D} \leqq \overline{\mathfrak{T}}(m_0, \mathfrak{U}_P^{(0)})$. Da $\mathfrak{D}$ nicht leer ist, kann daher auch M_{m_0} nicht leer sein, w. z. b. w.

Zusatz. Da $\mathfrak{D} \geqq M_{m_0}$ ist, so folgt $\mathfrak{D} = M_{m_0}$. Dies gilt auch, wenn m_0 keine Mindestordnung, das heißt wenn M_{m_0} leer ist. Wir werden diese Bemerkung später benötigen.

2127. Die im § 1 definierte ordnungsgeometrische Indikatrix ist ein Spezialfall dieser allgemeinen ordnungsgeometrischen Indikatrix. Man braucht nur im System der Bewegungen einer Geraden im E_n in geeigneter Weise den Begriff des Häufungspunktes und damit den Begriff der abgeschlossenen Hülle einzuführen.

221. **Vertauschung von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$.** Es kann sein, daß die Abbildungen T des erzeugenden Systems $\mathfrak{R}$ des Charakteristikensystems als Abbildungen des ganzen Umgebungsraumess $\mathfrak{R}$ auf eine echte oder unechte Teilmenge von sich selbst, das heißt von $\mathfrak{R}$, erklärt sind. Die Ordnungscharakteristik $T(\mathfrak{B})$ ist dann eben die Teilmenge des Raumes $\mathfrak{R}$, auf die die Basis $\mathfrak{B}$ bei der Abbildung T des ganzen Raumes $\mathfrak{R}$ abgebildet wird. Es kann natürlich auch dabei vorkommen, daß zwei verschiedene Abbildungen dieselbe Charakteristik liefern.

2211. Sind die Abbildungen T von $\mathfrak{R}$ als Abbildungen des ganzen Umgebungsraumes erklärt, so kann man die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ die Rollen tauschen lassen. Denn jede Abbildung T bildet jetzt auch die Menge $\mathfrak{M}$ auf eine Menge $T(\mathfrak{M})$ ab. Man kann daher die Gesamtheit aller $T(\mathfrak{M})$ als Ordnungscharakteristikensystem zur Untersuchung von $\mathfrak{B}$ auffassen.

2212. Es sei wieder P ein fester Punkt von $\mathfrak{M}$ und Q ein fester Punkt von $\mathfrak{B}$. Entsprechend 2115 setzen wir voraus (vgl. dazu wieder 1511). :

Es gibt im Raume $\mathfrak{R}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_Q$ des Punktes Q so, daß für jedes T aus $\mathfrak{R}$ mit $T(P) \varepsilon U_Q$ der Durchschnitt der drei Mengen $T(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{U}_Q$ aus höchstens endlich vielen Punkten besteht.

2213. Unter dieser Voraussetzung erklären wir entsprechend 2115 den Begriff der Mindestordnung und der Ordnung von $Q \varepsilon B$ in bezug auf $P \varepsilon M$. Ist diese Ordnung beschränkt, so nennen wir sie r' und schreiben $r' = \omega(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K})$; ist sie nicht beschränkt, so schreiben wir $\omega(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K}) > N$, wobei N wieder eine beliebige, natürliche Zahl sein kann. Zwischen der Ordnung von $P \varepsilon \mathfrak{M}$ in bezug auf $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ und der Ordnung von $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ in bezug auf $P \varepsilon \mathfrak{M}$ besteht im allgemeinen keinerlei Beziehung. Man kann leicht Beispiele konstruieren, für die die eine der beiden Ordnungen erklärt ist, die andere dagegen nicht.

2214. Ist der Komplex $\mathfrak{K}$ von Abbildungen des ganzen Raumes $\mathfrak{R}$ auf sich selbst ein schwächster Häufungsraum, für den das Axiom B 1 gilt, so haben wir neben der Ordnung $\omega(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K})$ auch noch die Indikatrix $J(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K}) = (M_0', M_1', \ldots)$ von $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ im Bezug auf $P \varepsilon \mathfrak{M}$. Gelten außerdem noch die Axiome A 2 und B 2 und B 3, so gilt der Hauptsatz über die ordnungsgeometrische Indikatrix entsprechend auch für

$$J(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K}).$$

222. **Kinematische Ordnung und Indikatrix.** Ein einfaches Beispiel für die in 211 ff. entwickelten Begriffe bekommt man, wie wir sehen werden, wenn man für $\mathfrak{R}$ den n-dimensionalen euklidischen Raum E_n und für $\mathfrak{K}$ die Gruppe der Bewegungstransformationen des E_n in sich selbst setzt. Man spricht in diesem Falle von kinematischer Ordnung[12]) bezüglich einer bestimmten Basis. Die Indikatrix wollen wir daher in diesem Falle entsprechend **kinematische Indikatrix** nennen.

2221. Die kinematische Ordnung und Indikatrix wollen wir etwas eingehender betrachten. Wir wollen daher hier einige Bemerkungen über lineare Abbildungen des E_n im allgemeinen und orthogonale im besonderen zusammenstellen, da sie für später wichtig sind.

22211. Eine lineare Abbildung mit nicht verschwindender Determinante des E_n auf sich selbst

$$x_\nu' = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu\lambda} x_\lambda + b_\nu, \quad | a_{\nu\lambda} | \neq 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

ist umkehrbar eindeutig; wir bezeichnen sie mit $(a_{\nu\lambda}, b_\nu) = T$.

Gleichheit zweier linearer Abbildungen. Es sei $T_j = (a_{\nu\lambda}^{(j)}, b_\nu^{(j)})$, $j = 1, 2$. Wir schreiben $T_1 = T_2$ dann und nur dann, wenn

$$a_{\nu\lambda}^{(1)} = a_{\nu\lambda}^{(2)} \text{ und } b_\nu^{(1)} = b_\nu^{(2)}, \qquad \nu, \lambda = 1, \ldots, n.$$

Für die identische Abbildung schreiben wir

$$E = (\delta_{\nu\lambda}, 0), \quad \delta_{\nu\lambda} = \begin{cases} 1 \text{ für } \nu = \lambda \\ 0 \text{ für } \nu \neq \lambda \end{cases}.$$

Werden zwei lineare Abbildungen T_1 und T_2 in dieser Reihenfolge nacheinander ausgeführt, so ist das Ergebnis wieder eine lineare Abbildung T_3 und wir schreiben $T_3 = T_2 T_1$. Die zu T inverse Abbildung bezeichnen wir mit T^{-1}. Bildet man zu jedem Element T einer Menge $\mathfrak{T}$ das inverse, so bezeichnen wir die Menge der so erhaltenen inversen Elemente von $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{T}^{-1}$.

22212. **Abstand zweier linearer Abbildungen.** Wir führen im Raume der T eine Metrik ein, indem wir den Abstand zweier Abbildungen T_1 und T_2 definieren durch

$$| T_1, T_2 | = \sqrt{\sum_{\nu,\lambda=1}^{n} (a_{\nu\lambda}^{(1)} - a_{\nu\lambda}^{(2)})^2 + \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu^{(1)} - b_\nu^{(2)})^2}.$$

---

[12]) S. V. 2; 1. Heft, S. 55; 2. Heft, S. 117.

Diese Abstandsdefinition erfüllt die Forderungen, die man üblicherweise an eine Metrik zu stellen pflegt. Es gilt nämlich:

1. Es ist $|T_1, T_2| = 0$ dann und nur dann, wenn $T_1 = T_2$, sonst $|T_1, T_2| > 0$.
2. Es ist $|T_1, T_2| = |T_2, T_1|$.
3. Es gilt die Dreiecksungleichung: $|T_1, T_2| + |T_2, T_3| \geqq |T_3, T_1|$.

222213. **Betrag einer linearen Abbildung.** Den Abstand einer linearen Abbildung T von der identischen Abbildung E nennen wir den Betrag von T und schreiben

$$|T, E| = |T|.$$

Es ist $|E| = 0$.

22214. Nun beschränken wir uns auf die Betrachtung von Bewegungstransformationen, das heißt, wir setzen voraus, es solle für die Koeffizienten $a_{\nu\lambda}$ einer jeden betrachteten linearen Transformation gelten

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu_1\lambda} a_{\nu_2\lambda} = \delta_{\nu_1\nu_2} = \begin{cases} 1 \text{ für } \nu_1 = \nu_2 \\ 0 \text{ für } \nu_1 \neq \nu_2 \end{cases}, \quad \nu_1, \nu_2 = 1, \ldots, n.$$

Dann gilt für je drei Abbildungen T_1, T_2 und T_3 die Beziehung

$$|T_1, T_2| = |T_3 T_1, T_3 T_2|.$$

Der Beweis läßt sich auf Grund der Definition des Abstands leicht führen. Es genügt, wenn T_3 orthogonal ist.

22215. Mit Hilfe dieser Bemerkung gewinnen wir einige für uns wichtige Beziehungen. Es gilt nämlich:

1. $$|T^{-1}| = |T|.$$
2. $$|T_1, T_2| = |T_2^{-1} T_1|.$$
3. $$|T_1 T_2| \leqq |T_1| + |T_2|.$$

Der Beweis, der mit Hilfe der Beziehung aus 22214 leicht zu führen ist, soll hier nur für 1. erbracht werden. Es ist

$$|T^{-1}| = |T^{-1}, E| = |T T^{-1}, T E| = |E, T| = |T|.$$

22216. Gilt für eine Folge $\{T_n\}$ von Bewegungstransformationen und eine feste Transformation T die Beziehung $\lim_{n\to\infty} |T_n, T| = 0$, so schreiben wir auch $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

Aus $\lim_{n\to\infty} T_n' = T'$ und $\lim_{n\to\infty} T_n'' = T''$ folgt stets $\lim_{n\to\infty} T_n' T_n'' = T' T''$, aus $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ stets $\lim_{n\to\infty} T_n^{-1} = T^{-1}$. Daraus ergibt sich: Zu einer Transformation T^* und einem $\varepsilon > 0$ gibt es stets ein $\vartheta(T^*, \varepsilon) > 0$, so daß für $|T| < \vartheta(T^*, \varepsilon)$ gilt: $|T^{*-1} T T^*| < \varepsilon$. Aus der Metrik ergibt sich der Begriff des Häufungspunktes und damit auch der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{T}}$ einer Menge $\mathfrak{T}$ von Bewegungstransformationen. Es gelten die Axiome B 1 bis B 3. Weiter gilt für endlich oder unendlich viele $\mathfrak{T}_\nu$:

$$(\overline{\mathfrak{T}})^{-1} = \overline{\mathfrak{T}^{-1}} \text{ (Definition von } \mathfrak{T}^{-1} \text{ siehe 22211) und } \overline{\prod_\nu \mathfrak{T}_\nu} = \prod_\nu \overline{\mathfrak{T}_\nu}.$$

22221. Wir betrachten im Raume E_n die beiden Punktmengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$. Es sei P ein fester Punkt von $\mathfrak{M}$ und Q ein fester Punkt von $\mathfrak{B}$. Wegen der Eineindeutigkeit der Bewegungstransformationen sind die Voraussetzungen aus 2115 und aus 2212 äquivalent.

22222. Die Voraussetzungen aus 2115 und 2212 seien erfüllt. Es sei $m \geqq 0$, ganz. Dann wird behauptet:

$M'_m = M_m^{-1}$ (zur Definition von M^{-1} siehe 22221).

Zunächst zeigen wir: $M_m^{-1} \leqq M'_m$. Dazu betrachten wir eine Folge $\{\mathfrak{U}_n\}$ von Umgebungen des Punktes P mit den Eigenschaften von Axiom A 2. Die nicht negative ganze Zahl m halten wir fest und betrachten dazu die Mengenfolge $\{\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_n)\}$ und die Folge der abgeschlossenen Hüllen $\{\overline{\mathfrak{T}}(m, \mathfrak{U}_n)\}$. Der Durchschnitt aller dieser abgeschlossenen Hüllen heiße $\mathfrak{D}$. Nach einer Bemerkung in 2126, Zusatz, ist $\mathfrak{D} = M_m$.

Nun konstruieren wir zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}_n$ von P aus der Folge $\{\mathfrak{U}_n\}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}'_n$ von Q auf folgende Weise: Für jedes T aus $T(m, \mathfrak{U}_n)$ bilden wir $T^{-1}(\mathfrak{U}_n)$. $T(Q)$ liegt nach Definition von $T(m, \mathfrak{U}_n)$ (siehe 2116) in $\mathfrak{U}_n$, also liegt $Q = T^{-1}(T(Q))$ in $T^{-1}(\mathfrak{U}_n)$. Man kann nun eine Folge $\{\mathfrak{U}'_n\}$ von Umgebungen des Punktes Q so angeben, daß die Eigenschaften von Axiom A 2 entsprechend erfüllt sind und außerdem $T^{-1}(\mathfrak{U}_n) \leqq \mathfrak{U}'_n$ ist für jedes T aus $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_n)$. Für die Betrachtung von $Q \varepsilon B$ in bezug auf $P \varepsilon \mathfrak{M}$ bilden wir, entsprechend den Mengen $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_n)$, die Mengen $\mathfrak{T}'(m, \mathfrak{U}'_n)$, ihre abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{T}}'(m, U'_n)$ und deren Durchschnitt $\mathfrak{D}'$. Es ist $\mathfrak{D}' = M'_m$. Aus $T^{-1}(\mathfrak{U}_n) \leqq \mathfrak{U}_n$ für $T \varepsilon \mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_n)$ folgt:

$$\mathfrak{T}^{-1}(m, \mathfrak{U}_n) \leqq \mathfrak{T}'(m, \mathfrak{U}'_n).$$

Daraus folgt:

$$\overline{\mathfrak{T}^{-1}}(m, \mathfrak{U}_n) \leqq \overline{\mathfrak{T}}'(m, \mathfrak{U}'_n),$$

$$(\overline{\mathfrak{T}}(m, \mathfrak{U}_n))^{-1} \leqq \overline{\mathfrak{T}}'(m, \mathfrak{U}'_n),$$

$$\mathfrak{T}^{-1} \leqq \mathfrak{D}'.$$

Das ist aber gleichbedeutend mit $M_m^{-1} \leqq M'_m$. Entsprechend beweist man $M'^{-1}_m \leqq M_m$ und hat damit die Behauptung.

22223. Nun bilden wir rein formal $J^{-1}(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K}) = (M_0^{-1}, M_1^{-1}, \ldots)$ und nennen dies die zu $J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; K)$ **inverse Indikatrix.**

22224. Gleichheit zweier kinematischer Indikatrizen. Wir sagen, zwei kinematische Indikatrizen J und J' seien gleich und schreiben $J = J'$, wenn die Glieder von J und J' vermöge einer festen Transformation T einander ein-eindeutig entsprechen, das heißt, wenn es eine feste Transformation T gibt mit folgenden Eigenschaften:

Ist M_m das m-te Glied von J, M'_m das m-te Glied von J', so gilt:

1. Ist $T_1 \varepsilon M_m$, so ist $T\, T_1 \varepsilon M'_m$.
2. Ist $T_2 \varepsilon M'_m$, so ist $T^{-1}\, T_2 \varepsilon M_m$.

Dann haben wir den folgenden Satz:

Satz 3. *Für die kinematische Indikatrix gilt:*

$$J(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K}) = J^{-1}(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K}).$$

Daraus folgt

Satz 4. *Für die kinematische Ordnung gilt:*

$$\omega(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K}) = \omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K}).$$

$\omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K}) = \omega(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K})$ nennen wir daher auch die **kinematische Relativordnung** der beiden Punkte $P \varepsilon M$ und $Q \varepsilon \mathfrak{B}$.

2231. Die Betrachtung der kinematischen Ordnung und Indikatrix, insbesondere die Überlegungen aus 22222 legen eine ordnungsgeometrische Verallgemeinerung des Bewegungsbegriffes nahe. Zum Zwecke dieser Verallgemeinerung beachten wir, daß zur Definition der Mengen M_m (siehe 21221) bzw. M'_m (siehe 2214) die Voraussetzung aus 2115 bzw. 2212 nicht benutzt wurde. Wir können und wollen daher hier diese Definitionen aufrechterhalten, ohne das Erfülltsein einer solchen Voraussetzung zu fordern.

2232. **Ordnungsgeometrische Verallgemeinerung des Bewegungsbegriffes.** Es sei $\mathfrak{R}$ ein schwächster Umgebungsraum, in dem die Axiome A 1 und A 2 gelten. Der Komplex $\mathfrak{K}^*$ habe folgende Eigenschaften:

1. $\mathfrak{K}^*$ sei ein Komplex von Abbildungen des ganzen Raumes $\mathfrak{R}$ auf sich selbst.
2. $\mathfrak{K}^*$ sei ein schwächster Häufungsraum, in dem die Axiome B 1 bis B 3 gelten.
3. $\mathfrak{K}^*$ sei eine Gruppe.

Wir sagen, $\mathfrak{K}^*$ sei eine ordnungsgeometrische Verallgemeinerung der Bewegungsgruppe, wenn außerdem folgendes gilt:

Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Mengen von $\mathfrak{R}$ mit $P \varepsilon \mathfrak{M}$, $Q \varepsilon \mathfrak{B}$, so gilt stets $M'_m = M_m^{-1}$. In diesem Falle nennen wir jedes Element T von $\mathfrak{K}^*$ eine ordnungsgeometrisch verallgemeinerte Bewegung; die Ordnungen $r = \omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K}^*)$ und $r' = \omega(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K}^*)$ und die Indikatrizen $J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K}^*)$ und $J(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K}^*)$ nennen wir verallgemeinerte kinematische Ordnungen bzw. Indikatrizen.

Auch für verallgemeinerte kinematische Ordnung und Indikatrix gelten die Sätze 3 und 4 aus 22223, wenn man für verallgemeinerte kinematische Indikatrizen den Begriff der Gleichheit entsprechend 22224, jetzt aber mit Benützung einer festen ordnungsgeometrisch verallgemeinerten Bewegung T^* aus K^*, definiert.

§ 3. Über die Berechnung der kinematischen Indikatrix für ein aus einem Hyperflächen- und einem Kurvenpunkt bestehendes gewöhnliches Punktepaar.

Wir behandeln in diesem Paragraphen zunächst die Auflösung des Berührungspunktes einer beliebigen Kurve mit einer Hyperfläche in mehrere gemeinsame Punkte durch eine beliebig kleine Bewegung der berührenden Kurve. Diese Untersuchungen sind auf dem Begriff der Bewegungstransformation aufgebaut; auf den Spezialfall angewendet, daß die Kurve eine Gerade ist, stellen sie eine neue Behandlungsweise des Stoffes des ersten Paragraphen dar. Die Untersuchungsmethoden sind in weitem Umfange die bereits im ersten Paragraphen angewandten. Wo in diesem Paragraphen von einer Transformation die Rede ist, ist stets eine Bewegungstransformation gemeint.

3111. **Hyperflächenstück.** Wir erklären das Hyperflächenstück als $(n-1)$-dimensionales, topologisches Würfelbild. Im einzelnen setzen wir hier voraus: Es sei $n \geqq 2$. Im $(n-1)$-dimensionalen, Euklidischen Raume der Punkte $U = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ liege ein $(n-1)$-dimensionaler, offener Würfel W. In diesem Würfel W seien n Funktionen $\varphi_\nu(u_1, \ldots, u_{n-1})$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, erklärt, über die wir folgende Annahmen machen wollen:

1. Die Funktionen φ_ν seien überall in W stetig.
2. Ihre partiellen Ableitungen seien bis zur Ordnung $l = \binom{n}{2}$ einschließlich überall in W erklärt und stetig.

3. Die Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\varkappa}\right)$ $(\nu = 1, \ldots, n;\ \varkappa = 1, \ldots, n-1)$ habe überall in W den Rang $n-1$.

Statt $x_\nu = \varphi_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, schreiben wir auch kürzer $P = \varphi(U)$. Aus $\varphi(U_1)\varphi = (U_2)$ soll hier stets folgen $U_1 = U_2$. Im n-dimensionalen, Euklidischen Raume der Punkte $P = (x_1, \ldots, x_n)$ ist dann durch $P = \varphi(U)$ ein Hyperflächenstück F gegeben.

3112. **Kurvenstück.** Wir erklären das Kurvenstück als topologisches Streckenbild. Im einzelnen setzen wir hier voraus: In einem offenen Intervall J seien n Funktionen $\psi_\nu(t)$ erklärt, die folgende Eigenschaften haben sollen:

1. Die Funktionen ψ_ν seien überall in J stetig.
2. Ihre Ableitungen seien bis zur Ordnung $l = \binom{n}{2}$ einschließlich überall in J erklärt und stetig.
3. Überall in J sei $\psi_1'^2 + \cdots + \psi_n'^2 \neq 0$.

Statt $x_\nu = \psi_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, schreiben wir auch kürzer $P = \psi(t)$. Über C setzen wir noch voraus, daß aus

$$P_1 = \psi(t_1),\ P_2 = \psi(t_2) \text{ und } P_1 = P_2 \text{ folgen soll } t_1 = t_2.$$

Im n-dimensionalen, Euklidischen Raume der Punkte $P = (x_1, \ldots, x_n)$ ist dann durch $P = \psi(t)$ ein Kurvenstück C gegeben.

3113. **Die Funktion $\Phi_T(t)$.** Ein wesentliches Hilfsmittel bei der Betrachtung des Durchschnittes von F und $T(C)$ schaffen wir uns durch die Definition der Funktion $\Phi_T(t)$. Wir betrachten einen Punkt $Q^* = \varphi(U^*)$ unseres Hyperflächenstückes. $U^* = (u_1^*, \ldots, u_{n-1}^*)$ liegt in W. O. B. d. A. sei die Determinante $d(U^*) = \left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\varkappa}\right|_{U^*}$ mit $\nu, \varkappa = 1, \ldots, n-1$ nicht gleich Null.

31131. Die Zahl δ. Wegen der Stetigkeit der $\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\varkappa}$ gibt es ein $\delta > 0$, für das gilt:

1. Der Bereich $|u_\varkappa - u_\varkappa^*| < \delta$ $(\varkappa = 1, \ldots, n-1)$ liegt ganz in W.
2. In diesem Bereich ist $d(U) = \left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\varkappa}\right| \neq 0$.

31132. Der Bereich B_ζ. Wir betrachten die $n-1$ Gleichungen

$$x_1 = \varphi_1(u_1, \ldots, u_{n-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1} = \varphi_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

Sind $x_1^*, \ldots, x_n^*$ die Koordinaten von Q^*, so gilt:

$$x_1^* = \varphi_1(u_1^*, \ldots, u_{n-1}^*),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1}^* = \varphi_{n-1}(u_1^*, \ldots, u_{n-1}^*).$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es daher ein $\zeta > 0$, so daß für den Bereich B_ζ, gegeben durch $|x_\nu - x_\nu^*| < \zeta$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$ im Raume der Punkte $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $n-1$ Funktionen $u_\varkappa = \chi_\varkappa(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\varkappa = 1, \ldots, n-1$, erklärt sind, für die folgendes gilt:

1. Die Funktionen $\chi_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, n-1)$ sind eindeutig und stetig in B_ζ.

2. Überall in B_ζ gilt: $|\chi_\varkappa(x_1,\ldots,x_{n-1}) - \chi_\varkappa(x_1^*,\ldots,x_{n-1}^*)| < \delta$.

3. Die partiellen Ableitungen der $\chi_\varkappa$ sind überall in B_ζ bis zur Ordnung l einschließlich erklärt und stetig.

4. Überall in B_ζ gilt: $x_\nu = \varphi_\nu(\chi_1,\ldots,\chi_{n-1})$ für $\nu = 1,\ldots,n-1$.

31133. Die Zahlen ϱ^*, ε^*. Nun betrachten wir einen Punkt $P^* = \psi(t^*)$ unseres Kurvenstücks. t^* liegt in J. Wegen der Stetigkeit der Funktion $\psi_\nu(t)$ gibt es ein $\varrho_\nu > 0$ so, daß das Intervall $|t - t^*| < \varrho_\nu$ ganz in J liegt und daß für $|t - t^*| < \varrho_\nu$ gilt: $|\psi_\nu(t) - \psi_\nu(t^*)| < \frac{\zeta}{3n}$. Wir setzen

$$\varrho^* = \mathrm{Min}(\varrho_1,\ldots,\varrho_n),$$

$$M = \mathrm{Max}(|\psi_1(t^*)|,\ldots,|\psi_n(t^*)|),$$

$$\varepsilon^* = \frac{\zeta}{3n(M+1)}.$$

31134. Die Funktionen $\chi_{\varkappa T}(t)$. Es sei $T^* = (a_{\nu\lambda}^*, b_\nu^*)$ mit $T^*(P^*) = Q^*$. Weiter sei T' eine Transformation, für die $|T'| < \vartheta(T^*, \varepsilon^*)$ gelte (vgl. 22216). Wir setzen

$$T'\,T^* = T = (a_{\nu\lambda}, b_\nu).$$

Dann gilt

$$|T, T^*| = |T' \cdot T^*, T^*| = |T^{*-1}\,T'\,T^*| < \varepsilon^*.$$

Das Kurvenstück $T(C)$ ist gegeben durch:

$$x_{\nu,T}(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu\lambda}\psi_\lambda(t) + b_\nu, \qquad \nu = 1,\ldots,n.$$

Es ist $x_{\nu,T^*}^* = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu\lambda}^*\psi_\lambda(t^*) + b_\nu^*$. Für $|t - t^*| < \varrho^*$ gilt nun:

$$\begin{aligned}
|x_{\nu,T}(t) - x_{\nu,T^*}(t^*)| &\leqq \sum_{\lambda=1}^{n} |a_{\nu\lambda}\psi_\lambda(t) - a_{\nu\lambda}^*\psi_\lambda(t^*)| + |b_\nu - b_\nu| \cdot \\
&\leqq \sum_{\lambda=1}^{n} |a_{\nu\lambda}|\,|\psi_\lambda(t) - \psi_\lambda(t^*)| + \sum_{\lambda=1}^{n} |\psi_\lambda(t^*)|\,|a_{\nu\lambda} - a_\nu^*| + |b_\nu - b_\nu^*| \\
&< n\frac{\zeta}{3n} + n\,M\frac{\zeta}{3n(M+1)} + \frac{\zeta}{3n(M+1)} \\
&< \frac{\zeta}{3} + \frac{\zeta}{3} + \frac{\zeta}{3} = \zeta.
\end{aligned}$$

Setzt man daher die $n-1$ Funktionen $x_{1,T}(t),\ldots,x_{n-1,T}(t)$ in die $n-1$ Funktionen $\chi_\varkappa(x_1,\ldots,x_{n-1})$ ein, so bekommt man die Funktionen

$$\chi_{\varkappa,T}(t) = \chi_\varkappa(x_{1,T}(t),\ldots,x_{n-1,T}(t)), \quad \varkappa = 1,\ldots,n-1.$$

Für diese gilt:

1. Die Funktionen $\chi_{\varkappa,T}$ sind in $|t - t^*| < \varrho^*$ erklärt, stetig und l-mal stetig differenzierbar.

2. Es ist $\chi_{\varkappa,T^*}(t^*) = \chi_\varkappa(x_{1,T^*}^*,\ldots,x_{n-1,T^*}^*)$.

3. Für $|t - t^*| < \varrho^*$ gilt: $|\chi_{\varkappa,T}(t) - \chi_{\varkappa,T^*}(t^*)| < \delta^*$.

Nun bilden wir noch die Funktion

$$\Phi_T(t) = \varphi_n(\chi_{1,T}(t),\ldots,\chi_{n-1,T}(t)) - \left(\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu\lambda}\psi_\lambda(t) + b_\nu\right).$$

Diese Funktion ist in $|t-t^*|<\varrho^*$ erklärt, stetig und l-mal stetig differenzierbar.

3114. **Einige Eigenschaften der Funktion $\Phi_T(t)$.**

31141. **Die Nullstelleneigenschaft von $\Phi_T(t)$.** Notwendig und hinreichend dafür, daß der Parameterwert $\bar{t}$ mit $|\bar{t}-t^*|<\varrho^*$ einen Punkt des Kurvenstücks $T(C)$ liefert, der zugleich auf dem Hyperflächenstück F liegt, ist $\Phi_T(\bar{t})=0$. Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition von Φ_T.

31142. **Eine Gleichmäßigkeitseigenschaft von $\Phi_T^{(\sigma)}(t)$.** Es sei σ vorgegeben mit $0\leqq\sigma\leqq l$ und $0<\varrho<\varrho^*$. Zu jedem $\xi>0$ gibt es ein ε mit $0<\varepsilon<\vartheta(T^*,\varepsilon^*)$. (Definition ϱ^* und ε^* siehe 3113) und folgender Eigenschaft:

Ist $|T'|<\varepsilon$, so gilt für $T=T'\,T^*$ gleichmäßig in $|t-t^*|\leqq\varrho$:

$$|\Phi_T^{(\sigma)}(t)-\Phi_{T^*}^{(\sigma)}(t)|<\xi.$$

Beweis. a) Man sieht zunächst: Gilt diese hier für $\Phi_T^{(\sigma)}(t)$ ausgesprochene Gleichmäßigkeitseigenschaft für zwei von dem Parameter T abhängige Funktionen $f_T(t)$ und $g_T(t)$ der Variablen t, so gilt sie auch für $f_T(t)+g_T(t)$ und für $f_T(t)\cdot g_T(t)$.

b) Weiter beweisen wir: Ist die Funktion $h(x_1,\ldots,x_{n-1})$ im Bereich B_ξ (siehe 3113) stetig und haben die $n-1$ Funktionen $x_{1,T}(t),\ldots,x_{n-1,T}(t)$ (siehe 3113) die Gleichmäßigkeitseigenschaft, so hat auch die Funktion $h_T(t)=h(x_{1,T}(t),\ldots,x_{n-1,T}(t))$ die Gleichmäßigkeitseigenschaft.

Zum Beweise betrachten wir das im Raume der Punkte $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ durch $x_{1,T}(t),\ldots,x_{n-1,T}(t)$ gegebene Kurvenstück C', das dem Intervall $|t-t^*|\leqq\varrho$ entspricht. Dann gibt es im Raume der Punkte $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ einen Bereich B' mit folgenden Eigenschaften:

1. B' ist in B_ξ enthalten.
2. C' liegt ganz im Innern von B'.
3. B' ist abgeschlossen.

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $h(x_1,\ldots,x_{n-1})$ in B' gibt es zu ξ ein $\delta_\xi>0$ so, daß für je zwei Punkte $(x_1^{(1)},\ldots,x_{n-1}^{(1)})$ und $(x_1^{(2)},\ldots,x_{n-1}^{(2)})$ aus B', für die $|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|<\delta_\xi$ $(\nu=1,\ldots,n-1)$ gilt, auch

$$|h(x_1^{(1)},\ldots,x_{n-1}^{(1)})-h(x_1^{(2)},\ldots,x_{n-1}^{(2)})|<\xi$$

ist. Zu δ_ξ gibt es aber dann wegen der Gleichmäßigkeitseigenschaft der Funktionen $x_{\nu,T}(t)$ ein $\varepsilon(\delta_\xi)>0$ so, daß für $|T'|<\varepsilon(\delta_\xi)$ und $T=T'\,T^*$ gilt:

$$|x_{\nu,T}(t)-x_{\nu,T^*}(t)|<\delta_\xi \text{ in } |t-t^*|\leqq\varrho \qquad (\nu=1,\ldots,n-1).$$

Daraus folgt aber $|h_T(t)-h_{T^*}(t)|<\xi$ für $|t-t^*|\leqq\varrho$, was zu zeigen war.

c) Die Funktionen $x_{\nu,T}(t)=\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\nu\lambda}\psi_\lambda(t)=b_\nu$ $(\nu=1,\ldots,n)$ haben die Gleichmäßigkeitseigenschaft. Zum Beweise sei M eine obere Schranke für alle $|\psi_\lambda(t)|$ in $|t-t^*|\leqq\varrho$. Wir setzen $\varepsilon_\xi=\dfrac{\xi}{2n(M+1)}$ und haben für $|T'|<\vartheta(T^*,\varepsilon_\xi)$ und $T'\,T^*=T$ in $|t-t^*|\leqq\varrho$:

$$\begin{aligned}|x_{\nu,T}(t)-x_{\nu,T^*}(t)| &\leqq\sum_{\lambda=1}^{n}|a_{\nu\lambda}\psi_\lambda(t)-a_{\nu\lambda}^*\psi_\lambda(t)|+|b_\nu-b_\nu^*|\\ &=\sum_{\lambda=1}^{n}|\psi_\lambda(t)|\cdot|a_{\nu\lambda}-a_{\nu\lambda}^*|+|b_\nu-b_\nu^*|\\ &<n\,M\frac{\xi}{2n(M+1)}+\frac{\xi}{2n(M+1)}<\frac{\xi}{2}+\frac{\xi}{2}=\xi.\end{aligned}$$

Entsprechend beweist man die Gleichmäßigkeitseigenschaft für die Funktionen

$$\vartheta_\nu^{(\sigma)}(t), \quad 1 \leqq \sigma \leqq l, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

d) Nun betrachten wir die Funktion $\Phi_T(t)$. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi_T(t) &= \varphi_n(\chi_1(x_{1,T}(t), \ldots, x_{n-1,T}(t)), \ldots, \chi_{n-1,T}(x_{1,T}(t), \ldots, x_{n-1,T}(t))) - x_{n,T}(t)\\ &= h(x_{1,T}(t), \ldots, x_{n-1,T}(t)) - x_{n,T}(t).\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von h nach $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sind in B erklärt und stetig bis zur Ordnung l einschließlich. $\Phi_T^{(\sigma)}(t)$ baut sich durch Addition und Multiplikation aus den partiellen Ableitungen von h, in die die Funktionen $x_{\nu,T}(t)$ eingesetzt sind, und den Ableitungen der Funktionen $x_{\nu,T}(t)$ auf. Nach c) und b) gehen diese partiellen Ableitungen von h durch Einsetzen der $x_{\nu,T}(t)$ in Funktionen über, die die Gleichmäßigkeitseigenschaft haben. Nach c) und a) hat dann auch $\Phi_T^{(\sigma)}(t)$ die Gleichmäßigkeitseigenschaft. Aus der Gleichmäßigkeitseigenschaft von $\Phi_T^{(\sigma)}(t)$ folgt: Ist $|T_\nu T^{*-1}| < \vartheta(T^*, \varepsilon^*)$ und $\lim_{\nu\to\infty} T_\nu = T^*$, so gilt $\lim_{\nu\to\infty} \Phi_{T_\nu}^{(\sigma)}(t) = \Phi_{T^*}^{(\sigma)}(t)$ gleichmäßig in $|t - t^*| \leqq \varrho$.

31143. Die Gestalt von $\Phi_T^{(\sigma)}(t^*)$. Es sei $1 \leqq \sigma \leqq l$. Dann ist $\Phi_T^{(\sigma)}(t^*)$ ein Polynom der Koeffizienten $a_{\nu\lambda}^*$ von T^*, dessen Koeffizienten rationale Funktionen der partiellen Ableitungen der φ_ν bis zur Ordnung σ, genommen im Punkte U^*, und der Ableitungen der ϑ_ν bis zur Ordnung σ, genommen an der Stelle t^*, sind.

Beweis. Wir betrachten die Determinante

$$D(u^*, t^*, T^*) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_{n-1}} & \sum\limits_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda}^* \vartheta_\lambda' \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_{n-1}} & \sum\limits_{\lambda=1}^{n} a_{n\lambda}^* \vartheta_\lambda' \end{vmatrix}$$

und bezeichnen die Unterdeterminante, die durch Streichen der n-ten Zeile und der $\varkappa$-ten Spalte entsteht, mit $d_\varkappa = d_\varkappa(U)$. Dann gilt

$$\frac{du_\varkappa}{dt} = \frac{d\chi_{\varkappa,T^*}}{dt} = (-1)^{n-\varkappa-1}\frac{d_\varkappa}{d_n}.$$

Wir führen nun den Beweis durch vollständige Induktion:

I. $\sigma = 1$. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi_T'(t^*) &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1}\frac{d\chi_{1,T^*}}{dt} + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_{n-1}}\frac{d\chi_{n-1,T^*}}{dt} - \sum_{\lambda=1}^{n} a_{n\lambda}^* \vartheta_\lambda'\\ &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1}(-1)^{n-2}\frac{d_1}{d_n} + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_{n-1}}(-1)^0\frac{d_{n-1}}{d_n} - \sum_{\lambda=1}^{n} a_{n\lambda}^* \vartheta_\lambda'\\ &= (-1)^n \frac{D}{d_n}.\end{aligned}$$

Damit ist für $\sigma = 1$ die Behauptung bewiesen.

II. Gilt die Behauptung für σ, so folgt sie für $\sigma + 1$ durch Differentiation und durch Berücksichtigung von $\frac{du_k}{dt} = (-1)^{n-\varkappa-1}\frac{d_k}{d_n}$.

312. Einige Definitionen.

3121. Begriff der Auflösung. Den Begriff der Auflösung definieren wir hier für einen gemeinsamen Punkt eines Hyperflächenstücks und eines Kurvenstücks, wobei wir nicht voraussetzen, daß das Kurvenstück in dem betrachteten Punkt das Hyperflächenstück berührt. Für die Transformation T^* gelte $T^*(P^*) = Q^*$ Dabei sei

$Q^* = \varphi(U^*)$ ein Punkt von F und $P^* = \psi(t^*)$ ein Punkt von C. Wir sagen, der gemeinsame Punkt $T^*(P^*) = Q^*$ lasse sich durch eine beliebig kleine Bewegung T' von $T^*(C)$ in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen, wenn es zu jedem Zahlenpaar (ε, ϱ) mit $0 < \varrho < \varrho^*$ und $0 < \varepsilon < \vartheta(T^*, \varepsilon^*)$ (Def. von ϑ (T^*, ε^*) siehe 31133 bezw. 22216) eine Transformation T' gibt, die Eigenschaften hat:

1. $| T' | < \varepsilon$.
2. Ist $T = T' \cdot T^*$, so hat $\Phi_T(t)$ in $| t - t^* | < \varrho$ mindestens m verschiedene Nullstellen.

3122. **Berührungsgrad.** Es sei $m \geqq 1$. Wir sagen, der Berührungsgrad von F und $T^*(C)$ im Punkte $T^*(P^*) = Q^*$ sei mindestens gleich $m - 1$, wenn

$$\Phi^{(0)}_{T^*}(t^*) = 0, \Phi^{(1)}_{T^*}(t^*) = 0, \ldots, \Phi^{(m-1)}_{T^*}(t^*) = 0$$

gilt. Wir sagen, der Berührungsgrad sei genau gleich $m - 1$, wenn außerdem $\Phi^{(m)}_{T^*}(t^*) \neq 0$ gilt. Aus $T^*(P^*) = Q^*$ folgt, daß der Berührungsgrad mindestens gleich Null ist.

3123. **Auflösungsmatrix.** Wir betrachten zu $T^* = (a^*_{\nu\lambda}, b_\nu)$ die $k = \binom{n}{2} + n$ Polynome $\sum_{\lambda=1}^{n} a^*_{\nu\lambda} a^*_{\mu\lambda} - \delta_{\nu\mu}$, wobei $\delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 \text{ für } \nu = \mu \\ 0 \text{ für } \nu \neq \mu \end{cases}$ sein soll, und bezeichnen sie in irgendeiner Reihenfolge mit $p_1(a^*_{\nu\lambda}), \ldots, p_k(a^*_{\nu\lambda})$. Weiter betrachten wir die $m - 1$ Polynome von $a^*_{\nu\lambda}$:

$$p_{k+1}(a^*_{\nu\lambda}) = \Phi'_{T^*}(t^*), \ldots, p_{k+m-1}(a^*_{\nu\lambda}) = \Phi^{(m-1)}_{T^*}(t^*).$$

Nun bilden wir die Matrix

$$\mathfrak{M}_{m-1}(a^*_{\nu\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial a_{nn}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial p_{k+m-1}}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial p_{k+m-1}}{\partial a_{nn}} \end{pmatrix}$$

und nennen sie eine $(m - 1)$-te Auflösungsmatrix von T^*.

Die sich auf diese Weise für ein und dieselbe Funktion $\Phi_{T^*}(t)$ ergebenden, verschiedenen $(m - 1)$-ten Auflösungsmatrizen von T^* unterscheiden sich nur durch die Reihenfolge der ersten k Zeilen. Da wir zwei Matrizen, die sich nur auf diese Weise voneinander unterscheiden, für unsere Zwecke als äquivalent ansehen können, wollen wir im folgenden nur von der $(m - 1)$-ten Auflösungsmatrix von T^* sprechen.

3124. Es ist zu beachten, daß der Definition der Funktion $\Phi_T(t)$ und damit den in 312 definierten Begriffen eine ganz bestimmte Numerierung der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ zugrunde liegt. Eine der Funktion $\Phi_T(t)$ entsprechende Funktion und die entsprechenden weiteren Begriffe lassen sich für jede Numerierung der $x_1, \ldots, x_n$ definieren, für die $\left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\varkappa}\right| \neq 0$ ist, wobei $\nu, \varkappa = 1, \ldots, n - 1$. Allen weiteren Überlegungen sei eine ganz bestimmte solche Nummerierung zugrunde gelegt.

313. Es sei $1 \leqq m \leqq l + 1$. Wir sind nun in der Lage, eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit des gemeinsamen Punktes $T^*(P^*) = Q^*$ von $T^*(C)$ und F in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte aufzustellen.

3131. **Notwendige Bedingung.** Notwendig für die Auflösbarkeit des gemeinsamen Punktes $T^*(P^*) = Q^*$ von $T^*(C)$ und F in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte

ist, daß der Berührungsgrad von $T^*(C)$ und F in diesem Punkte mindestens gleich $m-1$ ist. Der Beweis folgt in 32.

3132. **Hinreichende Bedingung.** Hinreichend für die Auflösbarkeit des gemeinsamen Punktes $T^*(P^*) = Q^*$ von $T^*(C)$ und F in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte ist, daß

1. der Berührungsgrad von $T^*(C)$ und F in diesem Punkte mindestens gleich $m-1$ ist,
2. außerdem der Rang der $(m-1)$-ten Auflösungsmatrix von T^* gleich ihrer Zeilenzahl, also gleich $k+m-1$ ist.

Der Beweis folgt in 33.

32. Beweis der Richtigkeit der in 3131 aufgestellten notwendigen Bedingung. Zum Beweise betrachten wir die beiden Zahlenfolgen $\{\varepsilon_\nu\} = \left\{\frac{\vartheta(T^*,\varepsilon^*)}{2^\nu}\right\}$ und $\{\varrho_\nu\} = \left\{\frac{\varrho^*}{2^\nu}\right\}$. Definitionen von ε^* und ϱ^* sind in 3113 gegeben. Es wird vorausgesetzt, daß sich der gemeinsame Punkt $T^*(P^*) = Q^*$ von $T^*(C)$ und F in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen lasse. Dann gibt es zum Zahlenpaar $\varepsilon_\nu, \varrho_\nu$ eine Transformation T'_ν, welche folgende Eigenschaften hat:

1. $|T'_\nu| < \varepsilon_\nu$,

2. Ist $T_\nu = T'_\nu \cdot T^*$, so hat $\Phi_{T_\nu}(t)$ in $|t-t^*| < \varrho_\nu$ mindestens m verschiedene Nullstellen $t_1^{(\nu)}, \ldots, t_m^{(\nu)}$. Nun sei $0 \leqq \sigma \leqq m-1$. Wir beweisen: $\Phi_T^{(\sigma)}(t^*) = 0$. Für $\sigma = 0$ folgt $\Phi_T^{(0)}(t^*) = 0$ ohne weiteres aus $T^*(P^*) = Q^*$. Ist $\sigma > 0$, so betrachten wir die $\sigma+1$ verschiedenen Nullstellen $t_1^{(\nu)}, \ldots, t_{\sigma+1}^{(\nu)}$ von $\Phi_{T_\nu}(t)$ und bilden damit den Differenzenquotienten der Ordnung σ: $[t_1^{(\nu)}, \ldots, t_{\sigma+1}^{(\nu)}]\Phi_{T_\nu}$. Dann gibt es zwischen dem kleinsten und dem größten der Werte $t_1^{(\nu)}, \ldots, t_{\sigma+1}^{(\nu)}$ ein τ_ν, für das $\Phi_{T_\nu}^{(\sigma)}(\tau_\nu) = 0$ gilt. Es gilt also auch: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Phi_{T_\nu}^{(\sigma)}(\tau_\nu) = 0$. Es gilt aber auch:

$$\lim_{\nu\to\infty} \Phi_{T_\nu}^{(\sigma)}(\tau_\nu) = \Phi_T^{(\sigma)}(t^*).$$

Der Beweis ist auf Grund der Gleichmäßigkeitseigenschaft von $\Phi_T^{(\sigma)}(t)$ und der Stetigkeit von $\Phi_T^{(\sigma)}(t)$ in bekannter Weise zu führen.

Daraus und aus $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_{T_n}^{(\sigma)}(\tau_n) = 0$ folgt aber:

$$\Phi_T^{(\sigma)}(t^*) = 0.$$

Dies gilt also für $0 \leqq \sigma \leqq m-1$, w. z. b. w.

331. Beweis der Richtigkeit der in 3132 aufgestellten hinreichenden Bedingung. Hierzu benötigen wir den Begriff des berührungsfreien Schnittpunktes von $T(C)$ und F und darüber zwei Hilfssätze.

3311. **Berührungsfreier Schnittpunkt.** Es sei $|T'| < \vartheta(T^*,\varepsilon^*)$ und $T' \cdot T^* = T = (a_{\nu\lambda}, b_\nu)$. Wir sagen, für t_0 mit $|t_0 - t^*| < \varrho^*$ liege ein berührungsfreier Schnittpunkt von $T(C)$ und F vor, wenn folgendes gilt:

1. $\Phi_T(t_0) = 0$.
2. $\Phi'_T(t_0) \neq 0$.

Die Bezeichnung „berührungsfreier Schnittpunkt" erklärt sich folgendermaßen: Aus $\Phi_T(t_0) = 0$ folgt: Ist $P_0 = \varphi(t_0)$, $u_\varkappa^{(0)} = \chi_{\varkappa,T}(t_0)$ $(\varkappa = 1, \ldots, n-1)$ und $Q_0 = \varphi(U_0)$ mit $U_0 = (u_1^{(0)}, \ldots, u_{n-1}^{(0)})$, so ist $T(P_0) = Q_0$. Entsprechend ist:

$$\Phi'_T(t_0) = (-1)^n \frac{D(U_0, t_0, T)}{d_n(U_0)}.$$

Also ist $\Phi'_T(t_0) = 0$ dann und nur dann, wenn $D(U_0, t_0, T) = 0$ ist. $D(U_0, t_0, T) = 0$ ist aber notwendig und hinreichend dafür, daß der Tangentenvektor an $T(C)$ für $P_0 = \varphi(t)$ in der Tangentenhyperebene an F in $T(P_0) = Q_0 = \varphi(U_0)$ liegt.

3312. Der eine Hilfssatz, den wir über den Begriff des berührungsfreien Schnittpunktes benötigen, besagt, daß ein berührungsfreier Schnittpunkt durch eine hinreichend kleine Bewegung des Kurvenstücks $T(C)$ nicht zerstört wird[5]).

Hilfssatz 5. *Voraussetzung. Es sei* $|T'| < \vartheta(T^*, \varepsilon^*)$ *und* $T = T'T^*$. *Weiter sei* $|t_0 - t^*| < \varrho < \varrho^*$. *Für* t_0 *liege ein berührungsfreier Schnittpunkt von* $T(C)$ *und* F *vor.*

Behauptung. Zu jedem $\zeta > 0$ *gibt es ein* $\varepsilon > 0$ *so, daß für* $|T''| < \varepsilon$ *gilt:* $T''T(C)$ *und* F *haben für* t_1 *einen berührungsfreien Schnittpunkt und es ist* $|t_1 - t_0| < \zeta$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit von $\Phi'_T(t)$ existiert ein $\zeta' > 0$ mit

1. $\zeta' \leqq \zeta$,
2. $|t - t_0| < \zeta'$ liegt ganz in $|t - t^*| < \varrho$,
3. in $|t - t_0| < \zeta$ ist $|\Phi'_T(t) - \Phi'_T(t_0)| < \dfrac{\Phi'_T(t_0)}{2}$.

Wegen $\Phi'_T(t_0) \neq 0$ gibt es in $|t - t_0| < \zeta'$ eine Stelle t' mit $\Phi_T(t') > 0$ und eine Stelle t'' mit $\Phi_T(t'') < 0$. Wir setzen $c = \mathrm{Min}(\Phi_T(t'), |\Phi_T(t'')|)$. Auf Grund der Gleichmäßigkeitseigenschaft von $\Phi_T(t)$ (siehe 31142) gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$ so, daß für $|T''| < \varepsilon_1$

$$|\Phi_{T''T}(t) - \Phi_T(t)| < c \text{ in } |t - t^*| < \varrho$$

gilt. Auf Grund der Gleichmäßigkeitseigenschaft von $\Phi'_T(t)$ gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$ so, daß für $|T''| < \varepsilon_2$

$$\Phi'_{T''T}(t) - \Phi'_T(t)| < \frac{|\Phi'_T(t_0)|}{2}$$

gilt. Wir setzen $\varepsilon = \mathrm{Min}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Dann gilt für $|T''| < \varepsilon$:

1. $\Phi_{T''T}(t)$ hat zwischen t' und t'', also in $|t - t_0| < \zeta'$ eine Nullstelle t_1.

Es ist nämlich

$$\Phi_{T''T}(t') \geqq \Phi_T(t') - |\Phi_T(t') - \Phi_{T''T}(t')| > \Phi_T(t') - c > 0.$$

Entsprechend beweist man $\Phi_{T''T}(t'') < 0$. Aus der Stetigkeit von $\Phi_{T''T}(t)$ folgt dann die Behauptung.

2. Es ist $\Phi'_{T''T}(t_1) \neq 0$, denn es ist

$$|\Phi'_{T''T}(t_1) - \Phi'_T(t_0)|$$

$$\leqq |\Phi'_{T''T}(t_1) - \Phi'_T(t_1)| + |\Phi'_T(t_1) - \Phi'_T(t_0)| < \frac{|\Phi'_T(t_0)|}{2} + \frac{|\Phi'_T(t_0)|}{2} = |\Phi'_T(t_0)|.$$

Also haben $T''\cdot T(C)$ und F für t_1 einen berührungsfreien Schnittpunkt.

3313. Der zweite Hilfssatz, den wir über den Begriff des berührungsfreien Schnittpunkts brauchen, besagt, daß man einen gemeinsamen Punkt von $T(l)$ und F, der kein berührungsfreier Schnittpunkt ist, durch eine beliebig kleine Bewegung von $T(C)$ in einen solchen verwandeln kann[5]).

Hilfssatz 6. *Voraussetzung. Es sei* $|T'| < \vartheta(T^*, \varepsilon^*)$ *und* $T = T'\cdot T^*$. *Weiter sei* $t_0 - t^*| < \varrho < \varrho^*$ *und* $\Phi_T(t_0) = 0$, $\Phi'_T(t_0) = 0$.

Behauptung. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein T'' mit

$$1. \qquad |T''| < \varepsilon.$$

$$2. \quad \Phi_{T''T}(t_0) = 0, \Phi'_{T''T}(t_0) \neq 0.$$

Beweis. Es gilt folgender Satz: Ist φ ein System von n linear abhängigen, von ein und demselben Punkt ausgehenden Vektoren $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ des n-dimensionalen, Euklidischen Raumes, wobei die $n-1$ Vektoren $a_1, \ldots a_{n-1}$ linear unabhängig sein sollen, so kann man durch eine beliebig kleine Drehung des Vektors b um den Ausgangspunkt aus φ ein System von n linear unabhängigen Vektoren machen. Aus diesem Satz, der hier als bekannt vorausgesetzt werden soll, folgt die Existenz einer Drehung T'' von $T(C)$ um den Punkt $T(P_0) = T(\psi(t_0)) = Q_0 = \varphi(U_0)$ mit den Eigenschaften:

1. $|T''| < \varepsilon$.

2. Statt der Beziehung $\Phi'_T(t_0) = (-1)^n \dfrac{D(U_0, t_0, T)}{d(U_0)} = 0$ (siehe 3311) bekommt man:

$$\Phi'_{T''T}(t_0) = (-1)^n \frac{D(U_0, t_0, T''T)}{d(U_0)} \neq 0.$$

Da T'' eine Drehung um $T(P_0)$ ist, gilt $T''T(P_0) = Q_0$, also $\Phi_{T''T}(t_0) = 0$. Damit ist Hilfssatz 6 bewiesen.

3321. Zum Beweise der Richtigkeit der hinreichenden Bedingung aus 3132 betrachten wir den n^2-dimensionalen Euklidischen Raum der Punkte $A = (a_{11}, \ldots, a_{nn})$. Für das Gleichungssystem $p_1(A) = 0, \ldots, p_{k+m-1}(A) = 0$ (vgl. 3123) führen wir die in 1311 definierten Mengen $\mathfrak{D}_\lambda^+, \mathfrak{D}_\lambda, \mathfrak{D}_\lambda^-$ ein. Wir wollen aber hier den Index anders bezeichnen; wir schreiben nämlich $\mathfrak{D}_{k+\mu}^+, \mathfrak{D}_{k+\mu}, \mathfrak{D}_{k+\mu}^-$, wobei $-k \leqq \mu \leqq l$.

Nun sei $1 \leqq m \leqq l+1$ und $T^* = (a_{\nu\lambda}^*, b_\nu^*)$ eine Transformation, für die $T^*(P^*) = Q^*$ gelte und die die hinreichende Bedingung aus 3132 erfülle. Dann gilt für den Punkt $A^* = (a_{\nu\lambda}^*, b_\nu^*)$:

1. A^* ist ein Punkt von $\mathfrak{D}_{k+m-1}$.

2. Die Matrix $\mathsf{M}_{k+m-1}(A^*)$ ist gleich der $(m-1)$-ten Auflösungsmatrix $\mathfrak{M}_{m-1}(A^*)$ von T^*. Ihr Rang ist daher gleich ihrer Zeilenzahl, also gleich $k+m-1$.

Wir können daher die Erweiterung von Hilfssatz 1 (vgl. 1314) anwenden und bekommen: Es gibt eine offene Umgebung $\mathfrak{U}_{A^*}$ des Punktes A^* derart, daß für $-k \leqq \mu \leqq l$ zu jedem Punkt A aus $\mathfrak{D}_{k+\mu}$, der zugleich ein Punkt von $\mathfrak{U}_{A^*}$ ist, in beliebiger Nähe von A mindestens ein Punkt A^+ von $\mathfrak{D}_{k+\mu}^+$ und mindestens ein Punkt A^- aus $\mathfrak{D}_{k+\mu}^-$ existieren, die beide ebenfalls zu $\mathfrak{U}_{A^*}$ gehören.

3322. Nun stellen wir folgende Behauptung auf:

Voraussetzung. Es sei $0 \leqq \mu \leqq m-1$, ferner $\overline{A} = (\overline{a}_{\nu\lambda})$ ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_{k+\mu}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$, der so nahe bei A^* liege, daß für die durch $\overline{A} = (\overline{a}_{\nu\lambda})$ und die Forderung $T(P^*) = Q^*$ eindeutig bestimmte Transformation $\overline{T} = (\overline{a}_{\nu\lambda}, b_\lambda)$ gilt: $|\overline{T}, T^*| < \dfrac{\varepsilon^*}{2}$ (Definition von ε^* siehe 3113). Die Menge dieser Punkte heiße $\mathfrak{D}'_{k+\mu}$.

Behauptung. Ist $0 < \varepsilon < \vartheta\left(\overline{T}, \dfrac{\varepsilon^*}{2}\right)$ und $0 < \varrho < \varrho^*$ (vgl. 3113), so gibt es zu $\overline{T}$ eine Transformation T' mit folgenden Eigenschaften:

$$1. \qquad |T'| < \varepsilon.$$

2. Ist $T = T'\overline{T}$, so ist $|T, T^*| \leqq |T, \overline{T}| + |\overline{T}, T^*|$

$$= |T'\overline{T}, \overline{T}| + |\overline{T}, T^* = |\overline{T}^{-1}T'\overline{T}| + |\overline{T}, T^*| < \frac{\varepsilon^*}{2} + \frac{\varepsilon^*}{2} = \varepsilon^*.$$

Die daher in $|t - t^*| < \varrho^*$ erklärte Funktion $\Phi_T(t)$ hat entweder in $|t - t^*| < \varrho_2$ mindestens $\mu + 1$ verschiedene Nullstellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$, für die $\Phi'_T(t_1) \neq 0, \ldots, \Phi'_T(t_{\mu+1}) \neq 0$ ist, oder es ist in einem Teilintervall von $|t - t^*| < \varrho$ überal $\Phi_T(t) = 0$.

3323. Diese Behauptung enthält die Auflösbarkeit des gemeinsamen Punktes $\overline{T}(P^*) = Q^*$ in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte, wie man durch Vergleich mit 3121 feststellt. Sie geht aber in einem wesentlichen Punkte noch darüber hinaus: In 3121 ist nur von gemeinsamen Punkten die Rede. Jetzt treten an deren Stelle berührungsfreie Schnittpunkte von $T(C)$ und F oder ein vollständiges Zusammenfallen von $T(C)$ und F für ein ganzes Intervall von t.

333. Wir beweisen die in 3322 aufgestellte Behauptung durch vollständige Induktion.

3331. I. $\mu = 0$. $\overline{A}$ sei ein Punkt aus $\mathfrak{D}'_{k+0}$. Es sei $0 < \varepsilon < \vartheta\left(\overline{T}, \frac{\varepsilon^*}{2}\right)$ und $0 < \varrho < \varrho^*$. Wir betrachten zu $\overline{T} = (\overline{a}_{\nu\lambda}, \overline{b}_\nu)$ mit $\overline{T}(P^*) = Q^*$ die Transformation E. Es ist $|E| = 0 < \varepsilon$ und $\Phi_{E\overline{T}}(t^*) = \Phi_{\overline{T}}(t^*) = 0$.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\Phi'_{\overline{T}}(t)^* \neq 0$. In diesem Falle leistet $T' = E$ das in der Behauptung Geforderte.

2. $\Phi'_{\overline{T}}(t^*) = 0$. In diesem Falle gibt es nach Hilfssatz 6 eine Transformation T' mit $|T'| < \varepsilon$ so, daß $\Phi_T(t^*) = 0$ und $\Phi'_T(t^*) \neq 0$ für $T = T'\overline{T}$ gilt.

Damit ist die Behauptung für $\mu = 0$ bewiesen.

3332. II. Wir nehmen an, die Behauptung sei für μ bewiesen. Dabei sei $0 \leqq \mu \leqq m - 1$. Wir beweisen die Behauptung für $\mu + 1$.

$\overline{A}$ sei ein Punkt von $\mathfrak{D}'_{k+\mu+1}$. Es sei $0 < \varepsilon < \vartheta\left(\overline{T}, \frac{\varepsilon^*}{2}\right)$ und $0 < \varrho < \varrho^*$. Weiter sei $T = (\overline{a}_{\nu\lambda}, \overline{b}_\nu)$ mit $T(P^*) = Q^*$. Da $\mathfrak{D}_{k+\mu+1}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{D}'_{k+\mu}$ ist, so gibt es nach Induktionsannahme wenigstens eine Transformation T', die die Forderungen der Behauptung für μ erfüllt. Von einer jeden solchen Transformation wollen wir sagen, sie gehöre für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ). Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

33321. Fall A. Unter den für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehörenden Transformationen gibt es wenigstens eine Transformation T' so, daß für $T = T'T$ in einem Teilintervall von $|t - t^*| < \varrho$ gilt: $\Phi_T(t) = 0$. In diesem Falle erfüllt die Transformation T' die Forderungen der Behauptung auch für $\mu + 1$.

33322. Fall B. Unter den für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehörenden Transformationen gibt es keine mit der unter Fall A beschriebenen Eigenschaft.

Es sei T' eine für $\overline{A}$ zu (ε, ϱ) gehörende Transformation und $T = T'\overline{T}$. Dann hat nach Induktionsannahme die Funktion $\Phi_T(t)$ im Intervall $|t - t^*| < \varrho$ mindestens $\mu + 1$ Nullstellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$, für die $\Phi'_T(t_1) \neq 0, \ldots, \Phi'_T(t_{\mu+1}) \neq 0$ gilt. t sei ein beliebiger Punkt des Intervalls $|t - t^*| < \varrho$. Wir bilden den Differenzenquotienten der Ordnung $\mu + 1$:

$$\psi_T(t) = [t_1, \ldots, t_{\mu+1}, t]\Phi_T.$$

$\varphi_T(t)$ ist überall in $|t - t^*| < \varrho$ erklärt, an den Stellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ als Grenzdifferenzenquotient und in $|t - t^*| < \varrho$ überall $(l-1)$-mal stetig differenzierbar.

33323. Nun wird behauptet: Unter den Transformationen, die nach Induktionsannahme für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehören, gibt es wenigstens eine Transformation T' so, daß die Funktion $\varphi_T(t)$ wobei $T = T' \cdot \overline{T}$, an einer Stelle t' des Intervalls $|t - t^*| < \varrho$ verschwindet.

33324. Der Beweis für diese Behauptung soll in 33325 nachgeholt werden. Wir ziehen hier gleich aus ihr die Folgerungen. Es sei zunächst t' von einer jeden der Stellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ verschieden. Dann folgt aus $\varphi_T(t') = 0$ wegen $[t_1, \ldots, t_{\mu+1}]\Phi_T = 0$ die Beziehung $[t_1, \ldots, t_\mu, t']\Phi_T = 0$. Ist nun $\Phi'_T(t') \neq 0$, so leistet T' für $\mu + 1$ das in der Behauptung Geforderte. Ist dagegen $\Phi'_T(t') = 0$, so kann nach den Hilfssätzen 5 und 6 eine Transformation T'' so klein gewählt werden, daß $|T''T'| < \varepsilon$ und $\Phi'_{T''T}(t') \neq 0$ ist, daß $\Phi_{T''T}(t'') = 0$ bleibt und daß die $\mu + 1$ berührungsfreien Schnittpunkte von $T(C)$ und F beim Übergang zu $T''T(C)$ nicht zerstört werden, wie auch die zugehörigen t-Werte im Inneren von $|t - t^*| < \varrho$ bleiben. $T''T'$ leistet dann das in der Behauptung Geforderte. Nun haben wir noch den Fall zu betrachten, daß t' einem der Werte $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ gleich ist. Es sei o. B. d. A. $t' = t_1$.

Aus $\varphi_T(t') = [t_1, \ldots, t_{\mu+1}, t']\Phi_T = 0$ schließen wir auf

$$[t_1, t']\Phi_T = \Phi'_T(t') = \Phi'_T(t_1) = 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Induktionsannahme, also kann der Fall $t_1 = t'$ gar nicht eintreten.

33325. Wir haben noch den Beweis für die in 33323 aufgestellte Behauptung nachzutragen. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es unter den Transformationen T', die nach Induktionsannahme für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehören, keine, für welche die Funktion $\varphi_T(t)$ mit $T = T'\overline{T}$ an einer Stelle des Intervalls $|t - t^*| < \varrho$ verschwindet. Für jede solche Transformation muß daher $\varphi_T(t)$ überall in $|t - t^*| < \varrho$ dasselbe Vorzeichen haben, da $\varphi_T(t)$ stetig ist.

Wir betrachten nun die Folge von Zahlenpaaren $\{\varepsilon_n, \varrho_n\}$, wobei $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$ und $\varrho_n = \frac{\varrho}{2^n}$ sein soll und beweisen: Unter den Transformationen T', die nach Induktionsannahme für den Punkt A zum Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ gehören, gibt es wenigstens eine Transformation T'^+, für die in $|t - t^*| < \varrho$ überall $\varphi_{T'^+\overline{T}}(t) > 0$ gilt.

Zum Beweise betrachten wir ein Zahlenpaar (ε', ϱ') mit $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon_n}{2}$ und $0 < \varrho' < \varrho_n$. Nach 3321 gibt es in beliebiger Nähe von $\overline{A}$ einen Punkt $A^+ = (a^+_\lambda)$ aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}^+_{k+\mu+1}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$. Wir setzen $T^+ = (a^+_\lambda, b^+_\nu)$, wobei die b^+_ν so bestimmt sein sollen, daß $T^+(P^*) = Q^*$ gilt. A^+ kann so nahe bei $\overline{A}$ gewählt werden, daß $|T^+\overline{T}^{-1}| < \varepsilon'$ und $|T^+, T^*| < \frac{\varepsilon^*}{2}$. Da $\mathfrak{D}^+_{k+\mu+1}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{D}_{k+\mu}$ ist, so ist A^+ auch ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_{k+\mu}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$. Wir können daher auf den Punkt A^+ die Induktionsannahme anwenden, und die Transformationen betrachten, die nach Induktionsannahme für den Punkt A^+ zum Zahlenpaar (ε', ϱ') gehören. T' sei eine solche. Wir bilden die Transformation $T'' = T'T^+\overline{T}^{-1}$. Dann gilt

$$| T'' | = | T' T^+ \overline{T}^{-1} | = | T^+ \overline{T}^{-1}, T'^{-1} | \leqq | T^+ \overline{T}^{-1} | + | T' |$$
$$< \varepsilon' + \varepsilon' < \varepsilon_n.$$

Deswegen und wegen $\varrho' < \varrho$ gehört die Transformation T'' für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ und damit auch zum Zahlenpaar (ε, ϱ); also hat für

$$T'' \overline{T} = T' T^+ \overline{T}^{-1} \overline{T} = T' T^+$$

die Funktion $\psi_{T' \cdot T^+}(t)$ überall in $| t - t^* |$ dasselbe Vorzeicehn. Wir können zeigen, daß $\psi_{T' \cdot T^+}(t) > 0$ ist in $| t - t^* | < \varrho$ sobald man ε' und ϱ' hinreichend klein wählt. Dazu betrachten wir im Intervall $| t - t^* | < \varrho'$ eine Stelle t', die von den ebenfalls in $| t - t^* | < \varrho'$ gelegenen, nach Induktionsannahme vorhandenen $\mu + 1$ Nullstellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ der Funktion $\Phi_{T' \cdot T^+}(t)$ verschieden ist. Dann gibt es ein τ mit $| t - t^* | < \varrho'$ und

$$\psi_{T' \cdot T^+}(t') = \Phi^{(\mu+1)}_{T' \cdot T^+}(\tau).$$

Gäbe es nun zu beliebig kleinen ε' und ϱ' stets eine Transformation T' mit $\psi_{T' T^+}(t) < 0$ in $| t - t^* | < \varrho$, so könnte man eine Folge von Zahlenpaaren $\{\varepsilon'_s, \varrho'_s\}$ konstruieren und dazu eine Folge $\{T'_s\}$ von Transformationen angeben derart, daß immer T'_s für A^+ zum Zahlenpaar $(\varepsilon'_s, \varrho'_s)$ gehört, wobei gilt:

1. $\lim\limits_{s \to \infty} \varepsilon'_s = 0, \lim\limits_{s \to \infty} \varrho'_s = 0.$

2. In $| t - t^* | < \varrho$ ist $\psi_{T' T^+}(t) < 0.$

Man könnte aus dem Intervall $| t - t^* | < \varrho$ eine Stelle t' wählen, die von den höchstens abzählbar unendlich vielen Stellen $t_1^{(s)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(s)}$ verschieden ist und bekäme:

$$\psi_{T' T^+}(t') = \Phi^{(\mu+1)}_{T' T^+}(\tau_s).$$

Dabei läge τ_s in $| t - t^* | < \varrho'_s$. Aus $\lim\limits_{s \to \infty} \varrho'_s = 0$ würde daher folgen: $\lim\limits_{s \to \infty} \tau_s = t^*$. Aus $\lim T'_s = 0$ folgt aber nach der Schlußbemerkung aus 31142, daß $\lim\limits_{s \to \infty} \Phi^{(\mu+1)}_{T' T^+}(t) = \Phi^{(\mu+1)}_{T^+}(t)$ gleichmäßig in $| t - t^* | < \varrho$ gilt. Daraus und aus $\lim\limits_{s \to \infty} \tau = t^*$ folgt

$$\lim_{s \to \infty} \Phi^{(\mu+1)}_{T' T^+}(\tau_s) = \Phi^{(\mu+1)}_{T^+}(t^*) = p_{k+\mu+1}(A^+).$$

Aus $\psi_{T' T^+}(t') < 0$ würde aber folgen $\Phi^{(\mu+1)}_{T' T}(\tau_s) < 0$ und daraus

$$\lim_{s \to \infty} \Phi^{(\mu+1)}_{T' T^+}(\tau_s) = \Phi^{(\mu+1)}_{T^+}(t)^* = p_{k+\mu+1}(A^*) \leqq 0.$$

Da A^+ ein Punkt von $\mathfrak{D}^+_{k+\mu+1}$ ist, so ist $p_{k+\mu+1}(A^+) > 0$. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt.

Ganz analog beweist man: Unter den Transformationen T', die nach Induktionsannahme für den Punkt A^- zum Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ gehören, gibt es wenigstens eine Transformation T''^-, für die in $| t - t^* | < \varrho$ überall $\psi_{T' \cdot \overline{T}}(t) < 0$ gilt.

Nun ordnen wir jedem Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ aus $\{\varepsilon_n, \varrho_n\}$ eine solche Transformation T'^+_n zu. Überall in $| t - t^* | < \varrho$ ist $\psi_{T'^+_n \overline{T}}(t) < 0$. Die nach Induktionsannahme vorhandenen $\mu + 1$ Nullstellen von $\Phi_{T'^+_n \overline{T}}(t)$ seien $t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}$; sie liegen in $| t - t^* | < \varrho_n$.

t sei eine Stelle aus $| t - t^* | < \varrho$, die von den höchstens abzählbar unendlich vielen Stellen $t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}$ (für $n = 1, 2, 3, \ldots$) verschieden ist, und für die $t - t^* > 0$ gilt. Dann gilt für hinreichend große n wegen $\lim\limits_{n \to \infty} \varrho_n = 0$:

$$t - t_1^{(n)} > 0, \ldots, t - t_{\mu+1}^{(n)} > 0.$$

Aus $\Phi_{T_n'^+\overline{T}}(t) = [t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}, t]\Phi_{T_n'^+ \cdot \overline{T}} > 0$ folgt dann $\Phi_{T_n'^+\overline{T}}(t) > 0$ und daraus nach 31142: $\lim_{n\to\infty} \Phi_{T_n'^+\overline{T}}(t) = \Phi_{\overline{T}}(t) \geqq 0$. Wegen der Stetigkeit von $\Phi_{\overline{T}}(t)$ gilt $\Phi_{\overline{T}}(t) \geqq 0$ für alle $t > 0$, auch für die Stellen $t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}$. Analog beweist man für $t - t^* > 0$ mit Benutzung der Transformationenfolge $\{T_n'^-\}$:

$$\Phi_{\overline{T}}(t) \leqq 0 \text{ in } |t - t^*| < \varrho.$$

Daraus folgt: Für $0 < t - t^* < \varrho$ gilt $\Phi_{\overline{T}}(t) = 0$. Das heißt: Die Transformation E gehört für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) und hat die in 33321 unter Fall A beschriebene Eigenschaft. In 33322 wurde aber vorausgesetzt, daß es eine Transformation mit der unter Fall A beschriebenen Eigenschaft unter den für $\overline{A}$ zu (ε, ϱ) gehörenden Transformationen nicht geben soll. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt.

33326. Damit ist die in 3322 aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen. Da A^* ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_{k+\mu+1}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$ ist, ist damit auch die in 3132 aufgestellte hinreichende Bedingung vollständig bewiesen.

3411. **Gewöhnliches Punktepaar.** Wir sagen, das Punktepaar P^*, Q^* des Punktes P^* der Kurve C und des Punktes Q^* der Hyperfläche F sei ein gewöhnliches Punktepaar, wenn es keine Transformation T und kein σ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. $T(P^*) = Q^*$,
2. $\Phi_T'(t^*) = 0, \ldots, \Phi_T^{(\sigma)}(t^*) = 0$.
3. Der Rang der σ-ten Auflösungsmatrix von T ist kleiner als die Zeilenzahl.

3412. Die σ-te Auflösungsmatrix einer Transformation T hat n^2 Spalten und $\binom{n}{2} + n + \sigma$ Zeilen. Für $\sigma > \binom{n}{2}$ ist die Zahl der Zeilen größer als die Zahl der Spalten. Daraus folgt: Ist P^*, Q^* ein gewöhnliches Punktepaar und $T(P^*) = Q^*$, so ist der Berührungsgrad von $T(C)$ und F im Punkte $T(P^*) = Q^*$ höchstens gleich $\binom{n}{2}$.

Hauptsatz über ein gewöhnliches Punktepaar. *Ist P^*, Q^* ein gewöhnliches Punktepaar, $T(P^*) = Q^*$ und der Berührungsgrad von $T(C)$ und F gleich $m - 1$, so läßt sich der gemeinsame Punkt $T(P^*) = Q^*$ von $T(C)$ und F durch eine beliebig kleine Bewegung von $T(C)$ in höchstens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen und, bei geeignetem Vorgehen, auch in genau m. Dabei ist $0 \leqq m - 1 \leqq \binom{n}{2}$.*

Beweis. Da der Berührungsgrad von $T(C)$ und F im Punkte $T(P^*) = Q^*$ höchstens gleich $\binom{n}{2}$ sein kann, folgt die Behauptung aus der notwendigen Bedingung aus 3131.

3413. Die Definition des gewöhnlichen Punktepaares ist auf eine ganz bestimmte Numerierung der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bezogen, da sie von der Funktion Φ_T Gebrauch macht (vgl. 3124). Die Bezeichnung „gewöhnliches Punktepaar" ist durch die Vermutung nahegelegt, daß es im allgemeinen zu einem Punktepaar P^*, Q^* bei einer bestimmten Numerierung der Koordinaten keine Transformation T mit den Eigenschaften 1. bis 3. aus 3411 gibt. Auf eine Nachprüfung dieser Vermutung soll hier nicht eingegangen werden.

3421. Für ein gewöhnliches Punktepaar ist die Voraussetzung aus 2115 erfüllt.

Wäre sie nämlich nicht erfüllt, so könnte man zu der Folge $\{\varrho_n\}$ mit $\varrho_n = \frac{\varrho^*}{2^n}$ eine

Folge von Transformationen $\{T_n\}$ angeben mit folgenden Eigenschaften:

1. $\lim_{n\to\infty} T_n = T^*$, wobei $T^*(P^*) = Q^*$.

2. $\Phi_{T_n}(t)$ ist in $|t - t^*| < \varrho^*$ erklärt und hat in $|t - t^*| < \varrho_n$ mindestens $\binom{n}{2} + 2$ verschiedene Nullstellen.

Daraus würde folgen, daß der gemeinsame Punkt $T^*(P^*) = Q^*$ von $T^*(C)$ und F sich durch eine beliebig kleine Bewegung in mindestens $\binom{n}{2} + 2$ verschiedene gemeinsame Punkte auflösen läßt. Damit bestünde ein Widerspruch zum Hauptsatz über gewöhnliche Punktepaare.

Für ein gewöhnliches Punktepaar sind also die Begriffe der Mindestordnung, der Ordnung, der Grenzcharakteristik der Mindestordnung m und der kinematischen Indikatrix erklärt.

3422. Ist $T^*(P^*) = Q^*$, so sind folgende beiden Aussagen äquivalent.

I. T^* ist eine Grenztransformation der Mindestordnung m von $P^* \varepsilon C$ in bezug auf $Q^* \varepsilon F$.

II. Der gemeinsame Punkt $T^*(P^*) = Q^*$ läßt sich durch eine beliebig kleine Bewegung von $T^*(C)$ in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen.

Der Beweis kann jetzt dem Leser überlassen bleiben.

3423. Unter dem Gleichungssystem S_{m-1} verstehen wir das System

$$p_1(a_{\nu\lambda}) = 0, \ldots, p_{k+m-1}(a_{\nu\lambda}) \geqq 0 \text{ (vgl. 3123).}$$

Aus 3422 folgt: Ist P^*, Q^* ein gewöhnliches Punktepaar, so läuft die Berechnung der Grenztransformationen der Mindestordnung m von $P^* \varepsilon C$ in bezug auf $Q^* \varepsilon F$ im wesentlichen auf die Bestimmung der Menge $\mathfrak{D}_{k+m-1}$ der reellen Wurzeln des Gleichungssystems S_{m-1} hinaus. Damit ist für ein gewöhnliches Punktepaar P^*, Q^* die Berechnung der beiden kinematischen Indikatrizen $J(P^*, Q^*)$ und $J(Q^*, P^*)$ auf die Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichungssysteme $S_1, \ldots, S_{\binom{n}{2}}$ zurückgeführt.

351. Wir betrachten noch kurz den allgemeinen Fall eines k-dimensionalen und eines $(n-k)$-dimensionalen Flächenstücks im E_n. Es sei $n \geqq 4$, $k \geqq 2$, $n - k \geqq 2$. Das Flächenstück F_1 sei gegeben durch

$$x_\nu = \varphi_\nu(u_1, \ldots, u_k).$$

Die Funktionen φ_ν seien in einem Würfel W_1 des Raumes der Punkte $U = (u_1, \ldots, u_k)$ erklärt und stetig. Ihre partiellen Ableitungen seien bis zur Ordnung $l \geqq 1$ in W_1 erklärt und stetig. Überall in W_1 gelte: $\text{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\varkappa}\right) = k$.

Das Flächenstück F_2 sei gegeben durch

$$X_\nu = \psi_\nu(v_1, \ldots, v_{n-k}).$$

Die Funktionen ψ_ν seien in einem Würfel W_2 des Raumes der Punkte $V = (v_1, \ldots, v_{n-k})$ erklärt und stetig. Ihre partiellen Ableitungen seien bis zur Ordnung $l \geqq 1$ in W_2 erklärt und stetig. Überall in W_2 gelte: $\text{Rang}\left(\frac{\partial \psi_\nu}{\partial v_\varkappa}\right) = n - k$.

Aus $P_1 = \varphi(U_1)$, $P_2 = \varphi(U_2)$ und $P_1 = P_2$ folge: $U_1 = U_2$, aus $Q_1 = \psi(V_1)$, $Q_2 = \psi(V_2)$ und $Q_1 = Q_2$ folge: $V_1 = V_2$. Es sei $P^* \varepsilon F_1$ und $Q^* \varepsilon F_2$.

Für P^* und Q^* gelte die Voraussetzung aus 2115.

352. **Die Berührungsdimension.** Es sei T ein Transformation, für die $T(P^*) = Q^*$ gelte. Wir betrachten im Punkte $T(P^*) = Q^*$ den k-dimensionalen linearen Tangentialraum erster Ordnung an die Fläche $T(F_1)$ und den $(n-k)$-dimensionalen linearen Tangentialraum erster Ordnung an die Fläche F_2. Der Durchschnitt dieser beiden Tangentialräume ist ein linearer Raum von der Dimension d. Es ist

$$0 \leqq d \leqq \text{Min}\,(k, n-k).$$

Wir nennen d die Berührungsdimension von $T(F_1)$ und F_2 im Punkte $T(P^*) = Q^*$ oder auch die Berührungsdimension von T.

353. **Die d-Ordnung.** Wir sagen, die d-Ordnung des Punktes $P^* \varepsilon F_1$ in bezug auf den Punkt $Q^* \varepsilon F_2$ sei gleich m, wenn es eine Grenztransformation der Berührungsdimension d und der Mindestordnung m von P^* in bezug auf Q^* gibt, aber keine von der Berührungsdimension d und der Mindestordnung $m+1$. Wir sagen, die d-Ordnung von Q^* in bezug auf P^* sei nicht beschränkt und schreiben $m_d = \infty$, wenn die Mindestordnungen der Grenztransformationen der Berührungsdimension d nicht beschränkt sind. Es sei $s = \text{Min}(k, n-k)$. Es gilt

$$\omega(P^*, Q^*) = \text{Max}(m_0, m_1, \ldots, m_s).$$

354. **Die große und die kleine kinematische Indikatrix.** Unter $M_{m,d}$ verstehen wir die Menge aller Grenztransformationen der Mindestordnung m und der Berührungsdimension d von P^* in bezug auf Q^*. Dann heiße

$$J_d(P^*_{F_1}, Q^*_{F_2}) = \begin{pmatrix} M_{1,0}, & M_{2,0}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots \\ M_{1,s}, & M_{2,s}, & \ldots \end{pmatrix}$$

die große kinematische Indikatrix von P^* in bezug auf Q^*. Entsprechend definieren wir $J_d(Q^*_{F_2}, P^*_{F_1})$. Ersetzen wir $M_{m,d}$ durch $M^{-1}_{m,d}$, so bekommen wir $J_d^{-1}(P^*_{F_1}, Q^*_{F_2})$. Es gilt:

$$J_d(Q^*_{F_2}, P^*_{F_1}) = J_d^{-1}(P^*_{F_1}, Q^*_{F_2}).$$

Unter der kleinen kinematischen Indikatrix des Punktes P^* in bezug auf den Punkt Q^* verstehen wir die Folge der $(s+1)$ d-Ordnungen. Es gilt:

$$i(P^*_{F_1}, Q^*_{F_2}) = (m_0, m_1, \ldots, m_s).$$

$$i(P^*_{F_1}, Q^*_{F_2}) = i(Q^*_{F_2}, P^*_{F_1}).$$

355. Die 0-Ordnung ist stets gleich 1. Für $d = 1$ lassen sich die Untersuchungen zur Berechnung der d-Ordnung ganz wie für den Fall $k = 1$ des Kurven und Hyperflächenpunktes durchführen. Für $d > 1$ bestehen jedoch neue wesentliche Schwierigkeiten.

Schriftenverzeichnis.

1. K. Apfelbacher, Über Beziehungen zwischen Umgebungsräumen und Häufungsräumen, Monatshefte für Math. u. Phys. **49** (1941), S. 153—193.
2. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, Hamburger Mathem. Einzelschriften **34**, 1. Heft, 2. Aufl. (1936), 2. Heft (1937).
3. G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932.
4. H. Busemann u. W. Feller, Krümmungseigenschaften konvexer Flächen, Acta math. **66** (1935), S. 1—47.
5. L. Berwald, Differentialinvarianten in der Geometrie. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen. Enzyklopädie der Mathematik III. 3, D. 11.

6. R. Falckenberg, Eine Verallgemeinerung der klassischen (Dupinschen) Indikatrix auf höhere Räume, Jahresber. der D. M. V. **52** (1942), S. 43.

7. O. Haupt, Zur Differentialgeometrie der Kurven und Flächen, Journal für die reine u. angew. Math. **169** (1933), S. 177—185.

8. O. Haupt, Zur Differentialgeometrie k-dimensionaler Gebilde im R_n, Journal für die reine u. angew. Math. **176** (1936), S. 95—111.

9. O. Haupt, Vollständigkeitsprobleme bei geometrischen Ordnungen, Sitzungsberichte der Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Abt., 1941, S. 57—66.

10. O. Haupt u. G. Aumann, Differential- u. Integralrechnung **2**, Berlin 1938.

11. J. Hjelmslev, Grundlag for Fladernes Geometri, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. og Mathem. Afd. (7) **12** (1914), S. 1—52.

12. J. Horn, Partielle Differentialgleichungen, 2. Aufl., Berlin 1929.

13. K. Kommerell, Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen, Dissertation, Tübingen 1897.

14. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra **1**, 2. Aufl., Berlin 1937; **2**, 2. Aufl., Berlin 1940.

Eingegangen 28. April 1942.

Ernst-Schröder-Preisaufgabe.

Die Technische Hochschule Fridericiana in Karlsruhe erläßt zum Gedächtnis des durch lange Jahre in ihrem Lehrkörper wirkenden Bahnbrechers der mathematischen Logik Ernst Schröder aus Anlaß der 100. Wiederkehr seines Geburtstages die folgende Preisaufgabe:

Die Untersuchungen Ernst Schröders zum Eliminations- und Auflösungsproblem in der Logik der Relative (*Vorlesungen über die Algebra der Logik* III 1, Leipzig 1895; vgl. J. C. C. McKinsey, *Postulates for the calculus of binary relations* (J. Symbolic Logic 3 (1940), 85—97) und A. Tarski, *On the calculus of relations* (Ibid. 6 (1941), 73—89)) sollen mit den heute verfügbaren Hilfsmitteln (vgl. H. Behmann, *Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem*, Math. Ann. 86 (1922), 163—229, und vor allem W. Ackermann, *Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik*, Math. Ann. 110 (1934), 390—413, und *Zum Eliminationsproblem der mathematischen Logik*, Math. Ann. 111 (1935), 61—63, sowie Hilbert-Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 2. Aufl., Berlin 1938, 106f.) weitergeführt werden.

Als Preis wird der Betrag von 500 RM für die beste Lösung der Aufgabe ausgesetzt. Als Zeitpunkt für die Einlieferung der Lösungen wird mit Rücksicht auf die Kriegsverhältnisse vorläufig der 1. Oktober 1944 angesetzt. Dem Preisrichterkollegium gehören außer dem Rektor der Technischen Hochschule Karlsruhe als Vorsitzendem, Prof. Dr.-Ing. R. G. Weigel, und dem Dekan der math.-naturw. Fakultät Prof. Dr. A. Bühl an: Studienrat Dr. Wilh. Ackermann (Burgsteinfurt), Prof. Dr. C. Boehm (Karlsruhe), der Herausgeber der Frege-Studien Jürgen v. Kempski (Berlin), Prof. Dr. Heinr. Scholz (Münster i. W.) sowie Prof. Dr. E. Ungerer in Karlsruhe als Geschäftsführer. Etwaige Anfragen sind an den Geschäftsführer zu richten.

Eingegangen 17. November 1942.

This material is restricted in use and cannot be quoted by title or abstract for propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited.

Die der transversalen Mercatorkarte der Kugel entsprechende Abbildung des Rotationsellipsoids

Von *Konrad Ludwig* in Hannover.

Stellung der Aufgabe, Methode und Sinn der Lösung.

In der Landesvermessung wird die winkeltreue Abbildung des Rotationsellipsoids in die Ebene angewandt, bei der ein Achsenschnitt in eine Gerade mit konstanter Längenvergrößerung abgebildet wird. Aus isometrischen Parametern des Rotationsellipsoids und der Ebene werden komplexe Veränderliche gebildet. Diese müssen infolge der geforderten Winkeltreue analytische Funktionen voneinander sein. Von der analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen des Rotationsellipsoids erklärt O. Schreiber[1]): „Die Bestimmung der Function ... ist häufig mit Schwierigkeiten verknüpft und, namentlich für die Ellipsoidfläche, in geschlossener Form oft unmöglich. Man kann in solchen Fällen den unbestimmten Ausdruck ... nach dem Taylorschen Satze in eine Reihe ... entwickeln .. und sodann die durch Anwendung des Taylorschen Satzes eingeführten Differentialquotienten aus den für die Projection vorgeschriebenen Bedingungen bestimmen." Diese Taylorsche Reihe hat den Nachteil, daß man ihren Rest nicht abschätzen kann. L. Krüger[2]) schätzt nur den ersten vernachlässigten Summanden ab. Diese Abschätzung reicht nur dann hin, wenn die Reihe alterniert und die absoluten Beträge der Summanden abnehmen. In dieser Arbeit wird jene analytische Funktion für das Rotationsellipsoid in geschlossener Form durch Parameterdarstellung gegeben, d. h. die komplexe Veränderliche der Ebene wird nicht unmittelbar durch die komplexe Veränderliche des Rotationsellipsoids, sondern beide komplexen Veränderlichen durch analytische Funktionen einer komplexen Hilfsveränderlichen ausgedrückt. Nach der Zerlegung in Real- und Imaginärteil werden also die isometrischen Parameter der Ebene nicht unmittelbar durch die des Rotationsellipsoids und umgekehrt ausgedrückt, sondern diese vier isometrischen Parameter werden durch reelle Funktionen zweier reeller Hilfsparameter ausgedrückt. Die Darstellung in geschlossener Form wird dadurch erreicht, daß statt der geographischen Breite das elliptische Integral 1. Gattung eingeführt wird; dadurch kann das in der Bogenlänge des Achsenschnitts auftretende elliptische Integral 2. Gattung ins Komplexe fortgesetzt werden. Betrachtet man die Amplituden der reellen Hilfsparameter als neue Parameter, so werden die elliptischen Funktionen beseitigt; dadurch wird die Zahlenrechnung wesentlich vereinfacht. Die Meridian- und Breitenkreisbilder werden in Parameterdarstellung gegeben. Die Bildgrenzen werden bestimmt; das Bild ist in der WO-Richtung nur um etwa ein Viertel länger als in der SN-Richtung,

[1]) O. Schreiber, Theorie der Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung, Hannover 1866, S. 8.

[2]) L. Krüger, Formeln zur konformen Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene, Berlin, 1919.

Reproduced and Distributed in the Public Interest by THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN

während die transversale Mercatorkarte der Kugel nach W und O unbegrenzt ist. Die Abbildung des Rotationsellipsoids ist in jedem Punkte winkeltreu im Gegensatz zu den Mercatorkarten der Kugel. Die Längenvergrößerung und die Meridiankonvergenz hat im Komplexen Herr H. Schmidt, Jena, berechnet. Die weitere Entwicklung der Formeln zur unmittelbaren Verwendung für geodätische Rechnungen soll in einer anschließenden Arbeit gegeben werden. Obgleich die transversale Mercatorkarte der Kugel bekannt ist, habe ich ebenso wie L. Krüger[3]) ihre Formeln vorangestellt, um die Formeln des Rotationsellipsoids daraufhin zu prüfen, daß sie die entsprechenden der Kugel bei Vernachlässigung der Exzentrizität als Sonderfall enthalten.

I. Die transversale Mercatorkarte der Kugel.

1. *Parameterdarstellung der Kugel mit geographischer Breite und Länge.* Wird der Kugelmittelpunkt als 0-Punkt und die Äquatorebene als (X, Y)-Ebene gewählt, die positive X-Achse durch den Meridian mit der geographischen Länge 0 gelegt und der Kugelradius mit A, die geographische Breite mit B und die geographische Länge mit L bezeichnet, so ist die Parameterdarstellung der Kugel

$$X = A \cos B \cos L, \tag{1}$$

$$Y = A \cos B \sin L, \tag{2}$$

$$Z = A \sin B. \tag{3}$$

Hieraus folgen die Richtungscos einer Kurve auf der Kugel durch Differentiation nach ihrer Bogenlänge S

$$\frac{dX}{dS} = -A \sin B \cos L \frac{dB}{dS} - A \cos B \sin L \frac{dL}{dS}, \tag{4}$$

$$\frac{dY}{dS} = -A \sin B \sin L \frac{dB}{dS} + A \cos B \cos L \frac{dL}{dS}, \tag{5}$$

$$\frac{dZ}{dS} = A \cos B \frac{dB}{dS}. \tag{6}$$

Die Summe der Quadrate ergibt

$$1 = A^2 \left(\frac{dB}{dS}\right)^2 + A^2 \cos^2 B \left(\frac{dL}{dS}\right)^2 = A^2 \cos^2 B \left[\frac{1}{\cos^2 B}\left(\frac{dB}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dS}\right)^2\right]. \tag{7}$$

2. *Einführung isometrischer Parameter.* Wird statt der geographischen Breite ein neuer Parameter H durch die Mercatorsche Grundformel

$$\frac{dH}{dB} = \frac{1}{\cos B} \tag{8}$$

eingeführt, so wird Gleichung (7)

$$1 = A^2 \cos^2 B \left[\left(\frac{dH}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dS}\right)^2\right], \tag{9}$$

d. h. H und L sind isometrische Parameter auf der Kugel. Gleichung (8) wird integriert

$$H = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin B}{1 - \sin B} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \sin B. \tag{10}$$

Trägt man die isometrischen Parameter als kartesische Koordinaten auf, so erhält man die normale Mercatorkarte der Kugel. Die letzte Gleichung wird dadurch vereinfacht, daß das Argument des Logarithmus mit seinem Zähler erweitert wird,

---

[3]) L. Krüger, Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene, Veröffentlichung des Königlich Preußischen Geodätischen Institutes (N. F.) 52 (1912), S. 6—11.

$$H = \ln \frac{1 + \sin B}{\cos B}. \tag{11}$$

Wählt man in der Ebene als isometrische Parameter rechtwinklige kartesische Koordinaten x und y, so ist die Bedingung für die allgemeinste winkeltreue Abbildung dadurch gegeben, daß $x + iy$ eine analytische Funktion von $H + iL$ ist:

$$x + iy = h(H + iL). \tag{12}$$

3. *Abbildung des Meridians mit der geographischen Länge* 0. Bei der Abbildung der Kugel soll ein Meridian in eine Gerade mit konstanter Längenvergrößerung abgebildet werden. Wird seine geographische Länge gleich 0 und seine Bildgerade als x-Achse gewählt, so ergibt Gleichung (12) die Abbildung dieses Meridians auf die x-Achse in der Darstellung

$$x = h(H). \tag{13}$$

Der Schnittpunkt der x-Achse mit dem Äquatorbild wird als 0-Punkt gewählt. Wird die konstante Längenvergrößerung mit m_0 bezeichnet, so wird der Meridian mit der geographischen Länge 0 auf die x-Achse durch die Gleichung

$$x = m_0 A B \tag{14}$$

abgebildet. Die Gleichungen (11) und (14) bestimmen in Parameterdarstellung die Abbildungsfunktion (13).

4. *Abbildung der gesamten Kugel.* Aus der Abbildung (11) und (14) des Meridians mit der geographischen Länge 0 erhält man die Abbildung der gesamten Kugel durch Fortsetzung ins Komplexe, wobei die geographische Breite zum komplexen Parameter $u + iv$ fortgesetzt wird:

$$H + iL = \ln \frac{1 + \sin(u + iv)}{\cos(u + iv)} \tag{15}$$

$$x + iy = m_0 A(u + iv). \tag{16}$$

Die reellen Parameter u und v können als isometrische Parameter einer Hilfsfläche, etwa als kartesische Koordinaten einer Hilfsebene betrachtet werden, die winkeltreu sowohl auf die Kugel als auch in die Bildebene abgebildet wird. In Gleichung (15) wird das Argument des Logarithmus in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$H + iL = \ln \frac{1 + \sin u \mathfrak{Cof} v + i \cos u \mathfrak{Sin} v}{\cos u \mathfrak{Cof} v - i \sin u \mathfrak{Sin} v} \tag{17}$$

$$= \ln \frac{(\mathfrak{Cof} v + \sin u)\,((\cos u + i \mathfrak{Sin} v)}{\cos^2 u \mathfrak{Cof}^2 v + \sin^2 u \mathfrak{Sin}^2 v}. \tag{18}$$

Im Nenner werden nur die Funktionen beibehalten, die im reellen Faktor des Zählers auftreten:

$$H + iL = \ln \frac{(\mathfrak{Cof} v + \sin u)\,(\cos u + i \mathfrak{Sin} v)}{\mathfrak{Cof}^2 v - \sin^2 u} \tag{19}$$

$$= \ln \frac{\cos u + i \mathfrak{Sin} v}{\mathfrak{Cof} v - \sin u}. \tag{20}$$

Der Realteil dieser Gleichung ist

$$H = \ln \frac{\sqrt{\cos^2 u + \mathfrak{Sin}^2 v}}{\mathfrak{Cof} v - \sin u}. \tag{21}$$

Der Radikand wird durch die Funktionen ausgedrückt, die im Nenner auftreten:

$$H = \frac{1}{2} \ln \frac{\mathfrak{Cof} v + \sin u}{\mathfrak{Cof} v - \sin u} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg} \frac{\sin u}{\mathfrak{Cof} v}. \tag{22}$$

Das absolute Argument der Funktion $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ ist $\leqq 1$; also sind die Werte dieser Funktion reell. Der Imaginärteil der Gleichung (20) ist

$$L = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{Sin}\, v}{\cos u}. \tag{23}$$

Die Gleichung (16) wird in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$x = m_0 A u, \tag{24}$$

$$y = m_0 A v. \tag{25}$$

5. *Längenvergrößerung.* Die Bogenlänge der Bildkurve wird mit s bezeichnet. Die Längenvergrößerung m wird im Komplexen berechnet

$$m = \frac{ds}{dS} = \left|\frac{d(x+iy)}{dS}\right| = \left|\frac{d(x+iy)}{d(H+iL)}\right| \left|\frac{d(H+iL)}{dS}\right|. \tag{26}$$

Aus Gleichung (14) folgt durch Differentiation nach der geographischen Breite

$$\frac{dx}{dB} = m_0 A\,. \tag{27}$$

Hierin wird die geographische Breite mit der Mercatorschen Grundformel (8) durch die isometrische Breite ersetzt:

$$\frac{dx}{dH} = m_0 A \cos B\,. \tag{28}$$

Diese Gleichung wird ins Komplexe fortgesetzt:

$$\frac{d(x+iy)}{d(H+iL)} = m_0 A \cos(u+iv). \tag{29}$$

Aus Gleichung (9) folgt

$$\left|\frac{d(H+iL)}{dS}\right| = \frac{1}{A\cos B}. \tag{30}$$

Mithin ist die Längenvergrößerung

$$m = \frac{m_0}{\cos B}\,|\cos(u+iv)| = m_0 \frac{\sqrt{\cos^2 u + \mathfrak{Sin}^2 v}}{\cos B}. \tag{31}$$

Längs des Meridians mit der geographischen Länge 0 sind die Hilfsparameter $u = B$ und $v = 0$. Daher bestätigt Gleichung (31), daß die Längenvergrößerung längs dieses Meridians gleich m_0 ist.

6. *Meridiankonvergenz.* Der Winkel von der x-Achse nach einem Meridianbild, von Norden nach Westen positiv gerechnet, wird mit c bezeichnet und Meridiankonvergenz genannt. Die Meridiankonvergenz ist gleich dem negativen Polarwinkel des Differentialquotienten $\frac{d(x+iy)}{d(H+iL)}$. Daher ist nach Gleichung (29)

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} u\, \mathfrak{Tg}\, v. \tag{32}$$

Die Winkeltreue ist nicht gesichert, wo die Längenvergrößerung gleich 0 oder ∞ ist. Die Längenvergrößerung kann nach Gleichung (31) gleich 0 werden, wenn $\cos u = 0$ und $v = 0$ ist, d. h. nach Gleichung (22) in den Polen. Dort nimmt die Längenvergrößerung zunächst den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ an. Aus Gleichung (32) folgt mit Gleichung (23)

$$\operatorname{tg} c = \frac{\sin u}{\mathfrak{Cof}\, v} \operatorname{tg} L,$$

also im Nord- und Südpol $c = \pm L$, d. h. die Kugel wird auch in den Polen winkeltreu abgebildet. Daher ist dort die Längenvergrößerung von der Richtung unabhängig, also gleich m_0. Die Längenvergrößerung ist gleich ∞, wenn $v = \infty$ ist, d. h. nach den Glei-

chungen (22) und (23) in den Punkten des Äquators mit den geographischen Längen $\pm\frac{\pi}{2}$. In diesen Punkten wird die Große jedes Winkels bei der Abbildung gleich 0. Die Längenvergrößerung kann gleich ∞ werden, wenn $B = \pm\frac{\pi}{2}$ ist, d. h. in den Polen. Doch sind dort die Winkeltreue und Längenvergrößerung schon festgestellt.

7. *Elimination der Hilfsparameter.* Aus den Gleichungen (10) und (22) folgt

$$\sin B = \frac{\sin u}{\mathfrak{Cof}\, v}. \tag{33}$$

Diese Gleichung bestätigt die Forderung, daß u für $v = 0$ gleich der geographischen Breite werden soll. Aus Gleichung (23) folgt

$$\operatorname{tg} L = \frac{\mathfrak{Sin}\, v}{\cos u}. \tag{34}$$

Die Gleichungen (33) und (34) werden nach den Hilfsparametern aufgelöst:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg} B}{\cos L}, \tag{35}$$

$$\mathfrak{Tg}\, v = \cos B \sin L. \tag{36}$$

Demnach sind Au und A arc sin $\mathfrak{Tg}\, v$ Soldnersche Koordinaten, wenn der Meridian mit der geographischen Länge 0 und der Äquator als Koordinatenachsen gewählt werden. In Gleichung (35) werden die geographischen Koordinaten mit den Gleichungen (3) und (1) durch die Raumkoordinaten ausgedrückt:

$$\operatorname{tg} u = \frac{Z}{X}.$$

Demnach sind die Parameterlinien $u =$ constans die auf dem Meridian mit der geographischen Länge 0 senkrecht stehenden größten Kreise. Sie werden nach Gleichung (24) in die Geraden $x =$ constans abgebildet, bleiben also geodätische Linien. Im besonderen wird der Äquator in die y-Achse abgebildet. In Gleichung (36) werden die geographischen Koordinaten mit Gleichung (2) durch die Raumkoordinaten ausgedrückt:

$$\mathfrak{Tg}\, v = \frac{Y}{A}$$

Demnach sind die Parameterlinien $v =$ constans die dem Meridian mit der geographischen Länge 0 parallelen Kreise. Sie werden nach Gleichung (25) in die Geraden $y =$ constans abgebildet, werden also geodätische Linien. Demnach wird das Netz der auf den Meridian mit der geographischen Länge 0 bezogenen geodätischen Parallelkoordinaten in das Netz der kartesischen Koordinaten abgebildet. Hier werden die Parameterlinien $x =$ constans und $y =$ constans auf der Kugel mit der analytischen Geometrie des Raumes bestimmt; Krüger[4]) bestimmt sie mit der Trigonometrie der Kugel.

In den Gleichungen (35) und (36) werden die Hilfsparameter nach den Gleichungen (24) und (25) durch die Koordinaten in der Ebene ausgedrückt:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{m_0 A} = \frac{\operatorname{tg} B}{\cos L}, \tag{37}$$

$$\mathfrak{Tg}\frac{y}{m_0 A} = \cos B \sin L. \tag{38}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, daß auch der Meridian mit der geographischen Länge π auf die x-Achse abgebildet wird.

---

[4]) A. a. O. [3]), S. 11.

Will man umgekehrt die Ebene auf die Kugel abbilden, so müssen die letzten beiden Gleichungen nach den geographischen Koordinaten aufgelöst werden:

$$\sin B = \frac{\sin \frac{x}{m_0 A}}{\mathfrak{Cof} \frac{y}{m_0 A}}, \tag{39}$$

$$\operatorname{tg} L = \frac{\mathfrak{Sin} \frac{y}{m_0 A}}{\cos \frac{x}{m_0 A}}. \tag{40}$$

Diese Gleichungen bedeuten die Breitenkreis- und die Meridianbilder.

In Gleichung (31) werden die Hilfsparameter durch die geographischen Koordinaten nach den Gleichungen (35) und (36) ausgedrückt:

$$m = \frac{m_0}{\cos B} \sqrt{\frac{\cos^2 L}{\operatorname{tg}^2 B + \cos^2 L} + \frac{\cos^2 B \sin^2 L}{1 - \cos^2 B \sin^2 L}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \cos^2 B \sin^2 L}}.$$

Daher wird auch der Meridian mit der geographischen Länge π mit der Längenvergrößerung m_0 abgebildet. In der letzten Gleichung werden die geographischen Koordinaten durch die Koordinaten in der Ebene nach den Gleichungen (39) und (40) ausgedrückt:

$$m = m_0 \mathfrak{Cof} \frac{y}{m_0 A}.$$

Demnach ist die Längenvergrößerung längs der Parallelkreise des Meridians mit der geographischen Länge 0 konstant. Ebenso ergibt Gleichung (32)

$$\operatorname{tg} c = \sin B \operatorname{tg} L = \operatorname{tg} \frac{x}{m_0 A} \mathfrak{Tg} \frac{y}{m_0 A}.$$

8. *Zusammenstellung der Formeln für die transversale Mercatorkarte der Kugel.* Mit den isometrischen Parametern $H = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \sin B$ und L ist:

$$\left.\begin{aligned} H &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \frac{\sin u}{\mathfrak{Cof} v}, \\ L &= \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{Sin} v}{\cos u}, \\ x &= m_0 A u, \\ y &= m_0 A v, \end{aligned}\right\} \quad \text{Parameterdarstellung der Abbildung}$$

$$m = m_0 \frac{\sqrt{\cos^2 u + \mathfrak{Sin}^2 v}}{\cos B} \quad \text{Längenvergrößerung}$$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} u \,\mathfrak{Tg} v \quad \text{Meridiankonvergenz}$$

oder nach Elimination der Hilfsparameter

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x}{m_0 A} &= \frac{\operatorname{tg} B}{\cos L}, \\ \mathfrak{Tg} \frac{y}{m_0 A} &= \cos B \sin L \end{aligned}\right\} \quad \text{Abbildung der Kugel in die Ebene}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin B &= \frac{\sin \frac{x}{m_0 A}}{\mathfrak{Cof} \frac{y}{m_0 A}}, \\ \operatorname{tg} L &= \frac{\mathfrak{Sin} \frac{y}{m_0 A}}{\cos \frac{x}{m_0 A}} \end{aligned}\right\} \quad \text{Umkehrung}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \cos^2 B \sin^2 L}} = m_0 \mathfrak{Cof} \frac{y}{m_0 A} \qquad \text{Längenvergrößerung}$$

$$\operatorname{tg} c = \sin B \operatorname{tg} L = \operatorname{tg} \frac{x}{m_0 A} \mathfrak{Tg} \frac{y}{m_0 A} \qquad \text{Meridiankonvergenz.}$$

II. Die der transversalen Mercatorkarte der Kugel entsprechende Abbildung des Rotationsellipsoids

1. *Parameterdarstellung des Rotationsellipsoids mit geographischen Koordinaten.* Führt man den Abstand R von der Z-Achse ein und bezeichnet die halbe große Hauptachse mit a und die halbe kleine Hauptachse mit b, so ist die Gleichung eines Meridians

$$\frac{R^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1.$$

Mit der Definition der geographischen Breite

$$\operatorname{tg} B = -\frac{dR}{dZ}$$

folgt aus der Meridiangleichung

$$R = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 B}}, \qquad Z = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 \operatorname{ctg}^2 B + b^2}}.$$

Daher ist die Parameterdarstellung des Rotationsellipsoids entsprechend den Gleichungen (1), (2) und (3)

$$X = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 B}} \cos L,$$

$$Y = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 B}} \sin L,$$

$$Z = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 \operatorname{ctg}^2 B + b^2}}.$$

Hieraus folgen die Richtungscos einer Kurve auf dem Rotationsellipsoid durch Differentiation nach ihrer Bogenlänge entsprechend den Gleichungen (4), (5) und (6)

$$\frac{dX}{dS} = -\frac{a^2 b^2 \sin B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B^3}} \cos L \frac{dB}{dS} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 B}} \sin L \frac{dL}{dS},$$

$$\frac{dY}{dS} = -\frac{a^2 b^2 \sin B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B^3}} \sin L \frac{dB}{dS} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 B}} \cos L \frac{dL}{dS},$$

$$\frac{dZ}{dS} = \frac{a^2 b^2 \cos B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B^3}} \frac{dB}{dS}.$$

Die Summe der Quadrate ergibt entsprechend Gleichung (7)

$$(41) \qquad 1 = \frac{a^4 b^4}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^3} \left(\frac{dB}{dS}\right)^2 + \frac{a^4}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 B} \left(\frac{dL}{dS}\right)^2$$

$$= \frac{a^4 \cos^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} \left[\frac{b^4}{\cos^2 B (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^2} \left(\frac{dB}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dS}\right)^2\right].$$

2. *Einführung isometrischer Parameter.* Wird statt der geographischen Breite ein neuer Parameter H durch die der Formel (8) entsprechende Mercatorsche Grundformel

$$(42) \qquad \frac{dH}{dB} = \frac{b^2}{\cos B (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)}$$

eingeführt, so wird Gleichung (41) entsprechend Gleichung (9).

$$1 = \frac{a^4 \cos^2 B}{a^2 \cos^2 B + \sin^2 B}\left[\left(\frac{dH}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dS}\right)^2\right], \tag{43}$$

d. h. H und L sind isometrische Parameter auf dem Rotationsellipsoid. Gleichung (42) wird entsprechend Gleichung (10) integriert, wobei die numerische Exzentrizität mit e bezeichnet wird:

$$H = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin B}{1-\sin B} - \frac{e}{2}\ln\frac{1+e\sin B}{1-e\sin B} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sin B - e\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,e\sin B.$$

Trägt man die Parameter L und H als kartesische Koordinaten auf, so erhält man die Mercatorkarte des Rotationsellipsoids. Die letzte Gleichung wird entsprechend Gleichung (11) dadurch vereinfacht, daß die Argumente der Logarithmen mit dem jeweiligen Zähler erweitert werden,

$$H = \ln\frac{1+\sin B}{\sqrt{1-\sin^2 B}} - e\ln\frac{1+e\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}. \tag{44}$$

3. *Abbildung des Meridians mit der geographischen Länge* 0. Der Meridian mit der geographischen Länge 0 wird mit der konstanten Längenvergrößerung m_0 auf die x-Achse durch die aus der Differentialgleichung (41) für L = constans folgende der Gleichung (14) entsprechende Funktion

$$x = m_0 a(1-e^2)\int_0^B \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi^3}} \tag{45}$$

abgebildet. Dieses elliptische Integral wird auf die Legendresche Normalform reduziert

$$x = m_0 a\left[E(B,e) - e^2\frac{\sin B\sqrt{1-\sin^2 B}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\right], \tag{46}$$

worin

$$E(B,e) = \int_0^B \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\; d\varphi$$

das elliptische Integral 2. Gattung mit der Amplitude B und dem Modul e ist.

Die in den Gleichungen (44) und (46) auftretenden Quadratwurzeln werden uniformisiert, wenn statt der geographischen Breite das elliptische Integral 1. Gattung in der Legendreschen Normalform mit der Amplitude B und dem Modul e

$$F(B,e) = \int_0^B \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

eingeführt wird. Diese Funktion wrd umgekehrt:

$$B = am(F,e), \tag{47}$$

$$\sin B = snF,\quad \sqrt{1-\sin^2 B} = cnF,\quad \sqrt{1-e^2\sin^2 B} = dnF.$$

Hiermit wird die Abbildung des Meridians mit der geographischen Länge 0 auf die x-Achse

$$H = \ln\frac{1+snF}{cnF} - e\ln\frac{1+esnF}{dnF}, \tag{48}$$

$$x = m_0 a\left[E(amF,e) - e^2\frac{snF\,cnF}{dnF}\right]. \tag{49}$$

4. *Abbildung des gesamten Rotationsellipsoids.* Aus der Abbildung (48) und (49) des Meridians mit der geographischen Länge 0 erhält man entsprechend den Gleichungen (15) und (16) die Abbildung des gesamten Rotationsellipsoids durch Fortsetzung ins

Komplexe, wobei das elliptische Integral 1. Gattung zum komplexen Parameter $u + iv$ fortgesetzt wird:

$$H + iL = \ln \frac{1 + sn(u+iv)}{cn(u+iv)} - e \ln \frac{1 + esn(u+iv)}{dn(u+iv)}, \tag{50}$$

$$x + iy = m_0 a \left[E(amu + iv, e) - e^2 \frac{sn(u+iv)\, cn(u+iv)}{dn(u+iv)} \right] \tag{51}$$

Neben den Funktionen $sn\,u$, $cn\,u$ und $dn\,u$ mit dem Modul e werden die Funktionen $sn'v$, $cn'v$ und $dn'v$ mit dem komplementären Modul $e' = \sqrt{1 - e^2}$ eingeführt. In Gleichung (50) werden entsprechend Gleichung (17) die Jacobischen Funktionen nach den Formeln[5])

$$sn(u+iv) = \frac{sn\,u\,dn'v + i\,cn\,u\,dn\,u\,sn'v\,cn'v}{1 - dn^2u\,sn'^2v}, \tag{52}$$

$$cn(u+iv) = \frac{cn\,u\,cn'v - i\,sn\,u\,dn\,u\,sn'v\,dn'v}{1 - dn^2u\,sn'^2v},$$

$$dn(u+iv) = \frac{dn\,u\,cn'v\,dn'v - ie^2\,sn\,u\,cn\,u\,sn'v}{1 - dn^2u\,sn'^2v}$$

in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$H + iL = \ln \frac{1 - dn^2u\,sn'^2v + sn\,u\,dn'v + i\,cn\,u\,dn\,u\,sn'v\,cn'v}{cn\,u\,cn'v - i\,sn\,u\,dn\,u\,sn'v\,dn'v}$$
$$- e \ln \frac{1 - dn^2u\,sn'^2v + esn\,u\,dn'v + iecn\,u\,dn\,u\,sn'v\,cn'v}{dn\,u\,cn'v\,dn'v - ie^2\,sn\,u\,cn\,u\,sn'v}.$$

Nach dem Erweitern jedes Bruches mit dem konjugierten Wert des Nenners entsprechend Gleichung (18) kann jeder Bruch durch $1 - dn^2u\,sn'^2v$ gekürzt werden:

$$H + iL = \ln \frac{(1 + sn\,u\,dn'v)(cn\,u\,cn'v + i\,dn\,u\,sn'v)}{-\frac{e'^2}{e^2} + \frac{e'^2}{e^2} sn'^2v + \frac{1}{e^2} dn^2u - \frac{e'^2}{e^2} dn^2u\,sn'^2v}$$
$$- e \ln \frac{(dn'v + esn\,u)(dn\,u\,cn'v + iecn\,u\,sn'v)}{dn^2u - e'^2\,sn'^2v}.$$

In den Nennern der Argumente der Logarithmen werden entsprechend Gleichung (19) nur die Funktionen beibehalten, die im reellen Faktor des jeweiligen Zählers auftreten:

$$H + iL = \ln \frac{(1 + sn\,u\,dn'v)(cn\,u\,cn'v + i\,dn\,u\,sn'v)}{1 - sn^2u\,dn'^2v}$$
$$- e \ln \frac{(dn'v + esn\,u)(dn\,u\,cn'v + iecn\,u\,sn'v)}{dn'^2v - e^2sn^2u}.$$

Hieraus folgt entsprechend Gleichung (20)

$$H + iL = \ln \frac{cn\,u\,cn'v + i\,dn\,u\,sn'v}{1 - sn\,u\,dn'v} - e \ln \frac{dn\,u\,cn'v + iecn\,u\,sn'v}{dn'v - esn\,u}. \tag{53}$$

Der Realteil dieser Gleichung ist entsprechend Gleichung (21)

$$H = \ln \frac{\sqrt{cn^2u\,cn'^2v + dn^2u\,sn'^2v}}{1 - sn\,u\,dn'v} - e \ln \frac{\sqrt{dn^2u\,cn'^2v + e^2cn^2u\,sn'^2v}}{dn'v - esn\,u}.$$

Die Radikanden werden entsprechend Gleichung (22) durch die Funktionen ausgedrückt, die im jeweiligen Nenner auftreten:

---

[5]) W. J. Láska, Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik, Braunschweig, 1888 bis 1894, S. 351, § 128.

$$H = \frac{1}{2}\ln\frac{1+snudn'v}{1-snudn'v} - \frac{e}{2}\ln\frac{dn'v+esnu}{dn'v-esnu} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,snudn'v - e\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{esnu}{dn'v}.$$

Der Imaginärteil der Gleichung (53) ist entsprechend Gleichung (23)

$$L = \operatorname{arc\,tg}\frac{dnusn'v}{cnucn'v} - e\operatorname{arc\,tg}\frac{e\,cnusn'v}{dnucn'v}.$$

Im Additionstheorem

$$E(amw_1 + w_2, e) = E(amw_1, e) + E(amw_2, e) - e^2 snw_1 snw_2 sn(w_1 + w_2)$$

wird der erste Summand des elliptischen Integrals 1. Gattung reell und der zweite rein imaginär gewählt:

$$E(amu + iv, e) = E(amu, e) + E(amiv, e) - e^2 snusnivsn(u + iv);$$

hierin werden das elliptische Integral 2. Gattung als Funktion des rein imaginären elliptischen Integrals 1. Gattung und die Funktion *sn* mit rein imaginärem Argument nach Gleichung (52) in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$E(amiv, e) = -iE(amv, e') + iv + itn'vdn'v^6),\quad sniv = itn'v;$$

mit diesen beiden Formeln wird das elliptische Integral 2. Gattung als Funktion des komplexen elliptischen Integrals 1. Gattung:

$$E(amu + iv, e) = E(amu, e) - iE(amv, e') + iv + itn'vdn'v - ie^2 snutn'vsn(u + iv).$$

Diese Zerlegung wurde dadurch ermöglicht, daß das elliptische Intergral 2. Gattung nicht als Funktion der Amplitude, sondern als Funktion des elliptischen Integrals 1. Gattung dargestellt worden ist. Mit der letzten Formel wird Gleichung (51)

$$(54)\qquad x + iy = m_0 a\Big\{E(amu, e) - iE(amv, e') + iv + itn'vdn'v - e^2 sn(u + iv)\Big[isnutn'v + \frac{cn(u + iv)}{dn(u + iv)}\Big]\Big\}$$

Hierin wird $dn(u + iv)$ ebenso wie in Gleichung (50) behandelt:

$$(55)\qquad \frac{cn(u + iv)}{dn(u + iv)} = \frac{cnucn'v - isnudnusn'vdn'v}{dnucn'vdn'v - ie^2 snucnusn'v} = \frac{(1 - dn^2usn'^2v)(cnudnudn'v - ie'^2snusn'vcn'v)}{(1 - dn^2usn'^2v)(dn^2u - e'^2sn'^2v)} = \frac{cnudnudn'v - ie'^2snusn'vcn'v}{dn^2u - e'^2sn'^2v}.$$

Hiermit wird

$$isnutn'v + \frac{cn(u + iv)}{dn(u + iv)} = \frac{cnudnudn'v + ie^2 snucn^2utn'v}{dn^2u - e'^2sn'^2v}$$

und damit

$$sn(u + iv)\Big[isnutn'v + \frac{cn(u + iv)}{dn(u + iv)}\Big] = \frac{(1 - dn^2usn'^2v)(snucnudnu + icn^2utn'vdn'v)}{(1 - dn^2usn'^2v)(dn^2u - e'^2sn'^2v)} = \frac{snucnudnu + icn^2utn'vdn'v}{dn^2u - e'^2sn'^2v}.$$

Dieser Wert wird in Gleichung (54) eingesetzt:

---

6) In G. J. Hoüel, Recueil de formules et de tables numériques, 3. Auflage, Paris, 1901, muß auf S. XL in Formel (75) statt $\frac{tn'u}{dn'u}$ stehen $tn'u\,dn'u$.

$$x+iy=m_0a\Big\{E(am\,u,e)-i\,E(am\,v,e')+iv+i\,tn'v\,dn'v - e^2\frac{sn\,u\,cn\,u\,dn\,u+i\,cn^2u\,tn'v\,dn'v}{dn^2u-e'^2sn'^2v}\Big\}.$$

Diese Gleichung wird entsprechend den Gleichungen (24) und (25) in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$(56)\qquad x=m_0a\Big\{E(am\,u,e)-e^2\frac{sn\,u\,cn\,u\,dn\,u}{dn^2u-e'^2sn'^2v}\Big\},$$

$$(57)\qquad y=m_0a\Big\{-E(am\,v,e')+v+tn'v\,dn'v-e^2\frac{cn^2u\,tn'v\,dn'v}{dn^2u-e'^2sn'^2v}\Big\}$$

$$=m_0a\Big\{-E(am\,v,e')+v+tn'v\,dn'v\,\frac{dn^2u-e'^2sn'^2v-e^2cn^2u}{dn^2u-e'^2sn'^2v}\Big\}$$

$$=m_0a\Big\{-E(am\,v,e')+v+e'^2\frac{sn'v\,cn'v\,dn'v}{dn^2u-e'^2sn'^2v}\Big\};$$

statt des letzten Nenners könnte auch $dn'^2v-e^2sn^2u$ geschrieben werden.

Da nach Gleichung (56) nicht wie nach Gleichung (24) x eine Funktion von u allein und nach Gleichung (57) nicht wie nach Gleichung (25) y eine Funktion von v allein ist, werden die Parameterlinien $u=$ constans und $v=$ constans auf dem Rotationsellipsoid nicht wie bei der Kugel in die Geraden $x=$ constans und $y=$ constans abgebildet. In der Bildebene haben die Parameterlinien $u=$ constans die Steigung $\frac{\partial y}{\partial v}:\frac{\partial x}{\partial v}$ und die Parameterlinien $v=$ constans die Steigung $\frac{\partial y}{\partial u}:\frac{\partial x}{\partial u}$. Aus den Gleichungen (56) und (57) folgen mit den Formeln

$$\frac{dsn\,u}{du}=cn\,u\,dn\,u,\quad \frac{dcn\,u}{du}=-sn\,u\,dn\,u,\quad \frac{ddn\,u}{du}=-e^2sn\,u\,cn\,u,\quad \frac{dE(am\,u,e)}{du}=dn^2u$$

die Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial u}=m_0a\{dn^2n-e^2[(dn^2u-e'^2sn'^2v)(cn^2u\,dn^2u-sn^2u\,dn^2u - e^2sn^2u\,cn^2u)+2e^2sn^2u\,cn^2u\,dn^2u]:(dn^2u-e'^2sn'^2v)^2\}$$

$$=\frac{m_0a}{(dn^2u-e'^2sn'^2v)^2}[(dn^2u-e'^2sn'^2v)(dn^4u-e'^2dn^2u\,sn'^2v - e^2cn^2u\,dn^2u+e^2sn^2u\,dn^2u+e^4sn^2u\,cn^2u)-2e^4sn^2u\,cn^2u\,dn^2u],$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-2m_0ae^2e'^2\frac{sn\,u\,cn\,u\,dn\,u\,sn'v\,cn'v\,dn'v}{(dn^2u-e'^2sn'^2v)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=2m_0ae^2e'^2\frac{sn\,u\,cn\,u\,dn\,u\,sn'v\,cn'v\,dn'v}{(dn^2u-e'^2sn'^2v)^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}=m_0a\{-dn'^2v+1+e'^2[(dn^2u-e'^2sn'^2v)(cn'^2v\,dn'^2v-sn'^2v\,dn'^2v - e'^2sn'^2v\,cn'^2v)+2e'^2sn'^2v\,cn'^2v\,dn'^2v]:(dn^2u-e'^2sn'^2v)^2\}$$

$$=\frac{m_0ae'^2}{(dn^2u-e'^2sn'^2v)^2}[(dn^2u-e'^2sn'^2v)(dn^2u\,sn'^2v-e'^2sn'^2v + cn'^2v\,dn'^2v-sn'^2v\,dn'^2v)+2e'^2sn'^2v\,cn'^2v\,dn'^2v].$$

Da in der eckigen Klammer des Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial u}$ der Parameter u in den Funktionen sn^2u, cn^2u und dn^2u auftritt und die Funktionen sn^2u und cn^2u mit dem Faktor e^2 auftreten, werden diese durch dn^2u ausgedrückt:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{m_0 a e'^2}{(dn^2u - e'^2 sn'^2v)^2}\,[dn^4u\,sn'^2v + e'^2 dn^2u\,sn'^4v - 2(1+e'^2)dn^2u\,sn'^2v + dn^2u + e'^2 sn'^2v].$$

Da in diesem Differentialquotienten der Parameter v nur in der Funktion sn'^2v auftritt, werden auch in dem Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial v}$ die Funktionen cn'^2v und dn'^2v durch die Funktion sn'^2v ausgedrückt:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{m_0 a e'^2}{(dn^2u - e'^2 sn'^2v)^2}\,[dn^4u\,sn'^2v + e'^2 dn^2u\,sn'^4v - 2(1+e'^2)dn^2u\,sn'^2v + dn^2u + e'^2 sn'^2v].$$

Demnach haben die Parameterlinien $u =$ constans die Steigung

$$\frac{dn^4u\,sn'^2v + e'^2 dn^2u\,sn'^4v - 2(1+e'^2)dn^2u\,sn'^2v + dn^2u + e'^2 sn'^2v}{-2e'^2 sn\,u\,cn\,u\,dn\,u\,sn'v\,cn'v\,dn'v}$$

und die Parameterlinien $v =$ constans die Steigung

$$\frac{2e'^2 sn\,u\,cn\,u\,dn\,u\,sn'v\,cn'v\,dn'v}{dn^4u\,sn'^2v + e'^2 dn^2u\,sn'^4v - 2(1+e'^2)dn^2u\,sn'^2v + dn^2u + e'sn'^2v}.$$

Jede dieser Steigungen ist wegen der Orthogonalität der Parameterlinien der negative reziproke Wert der anderen. Da diese Steigungen längs der betreffenden Parameterlinien veränderlich sind, werden die Parameterlinien nicht wie bei der Kugel in Geraden, also nicht in geodätische Linien abgebildet.

5. *Längenvergrößerung.* Aus Gleichung (45) folgt durch Differentiation nach der geographischen Breite entsprechend Gleichung (27)

$$\frac{dx}{dB} = \frac{m_0 a e'^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}^3}.$$

Hierin wird die geographische Breite mit der Mercatorschen Grundformel (42) durch die isometrische Breite ersetzt entsprechend Gleichung (28)

$$\frac{dx}{dH} = \frac{m_0 a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}.$$

Hierin wird ebenso wie in den Abbildungsgleichungen (48) und (49) des Meridians mit der geographischen Länge 0 statt der geographischen Breite das elliptische Integral 1. Gattung eingeführt:

$$\frac{dx}{dH} = m_0 a \frac{cn\,F}{dn\,F}.$$

Diese Gleichung wird ins Komplexe fortgesetzt entsprechend Gleichung (29):

$$\frac{d(x+iy)}{d(H+iL)} = m_0 a \frac{cn(u+iv)}{dn(u+iv)}. \tag{58}$$

Aus Gleichung (43) folgt entsprechend Gleichung (30)

$$\left|\frac{d(H+iL)}{dS}\right| = \frac{1}{a}\sqrt{1 + e'^2 \mathrm{tg}^2 B}.$$

Mithin ist die Längenvergrößerung entsprechend Gleichung (31)

$$m = m_0 \sqrt{1 + e'^2 \mathrm{tg}^2 B}\left|\frac{cn(u+iv)}{dn(u+iv)}\right|.$$

Hieraus wird mit Gleichung (55)

$$m = m_0\sqrt{1 + e'^2\mathrm{tg}^2 B}\,\frac{\sqrt{cn^2u\,dn^2u\,dn'^2v + e'^4 sn^2u\,sn'^2v\,cn'^2v}}{dn^2u - e'^2 sn'^2v}.$$

Da im letzten Radikanden der Faktor e'^4 auftritt, werden die Funktionen sn'^2v und cn'^2v durch dn'^2v ausgedrückt und ebenso der Nenner umgeformt:

$$m = m_0\sqrt{1 + e'^2\mathrm{tg}^2 B}\,\frac{\sqrt{-e^2sn^2u + cn^2u\,dn^2u\,dn'^2v + sn^2u\,dn'^2v + e^2sn^2u\,dn'^2v - sn^2u\,dn'^4v}}{dn'^2v - e^2sn^2u}.$$

Da im Nenner das Argument u nur in der Funktion sn^2u auftritt, werden im letzten Radikanden die Funktionen cn^2u und dn^2u durch sn^2u ausgedrückt:

$$m = m_0\sqrt{1 + e'^2\mathrm{tg}^2 B}\,\sqrt{\frac{1 - sn^2u\,dn'^2v}{dn'^2v - e^2sn^2u}}. \tag{59}$$

Längs des Meridians mit der geographischen Länge 0 sind die Hilfsparameter $u = F$ und $v = 0$; daher bestätigt Gleichung (59), daß die Längenvergrößerung längs dieses Meridians gleich m_0 ist.

6. *Meridiankonvergenz.* Aus Gleichung (58) folgt mit Gleichung (55) entsprechend Gleichung (32)

$$\mathrm{tg}\,c = e'^2\frac{sn\,u\;sn'v\,cn'v}{cn\,u\,dn\,u\,dn'v}.$$

7. *Zusammenstellung der Formeln für die der transversalen Mercatorkarte der Kugel entsprechende Abbildung des Rotationsellipsoids.* Mit den isometrischen Parametern $H = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\sin B - e\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\,e\sin B$ und L ist:

$$\left.\begin{aligned}
H &= \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\,sn\,u\,dn'v - e\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\frac{e\,sn\,u}{dn'v},\\
L &= \mathrm{arc\,tg}\frac{dn\,u\,sn'v}{cn\,u\,cn'v} - e\,\mathrm{arc\,tg}\frac{e\,cn\,u\,sn'v}{dn\,u\,cn'v},\\
x &= m_0a\left\{E(am\,u, e) - e^2\frac{sn\,u\,cn\,u\,dn\,u}{dn^2u - e'^2sn'^2v}\right\},\\
y &= m_0a\left\{-E(am\,v, e') + v + e'^2\frac{sn'v\,cn'v\,dn'v}{dn^2u - e'^2sn'^2v}\right\}
\end{aligned}\right\}$$ Parameterdarstellung der Abbildung

$$m = m_0\sqrt{1 + e'^2\mathrm{tg}^2 B}\,\sqrt{\frac{1 - sn^2u\,dn'^2v}{dn'^2v - e^2sn^2u}}$$ Längenvergrößerung

$$\mathrm{tg}\,c = e'^2\frac{sn\,u\,sn'v\,cn'v}{cn\,u\,dn\,u\,dn'v}$$ Meridiankonvergenz

Durch die neuen Parameter

$$am(u, e) = p, \tag{60}$$

$$am(v, e') = q, \tag{61}$$

die nicht isometrisch sind, werden in der Abbildung die elliptischen Funktionen beseitigt:

$$H = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\left(\sin p\sqrt{1 - e'^2\sin^2 q}\right) - e\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\frac{e\sin p}{\sqrt{1 - e'^2\sin^2 q}}, \tag{62}$$

$$L = \mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{1 - e^2\sin^2 p}\sin q}{\cos p\cos q} - e\,\mathrm{arc\,tg}\frac{e\cos p\sin q}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 p}\cos q}, \tag{63}$$

$$x = m_0a\left\{E(p, e) - e^2\frac{\sin p\cos p\sqrt{1 - e^2\sin^2 p}}{1 - e^2\sin^2 p - e'^2\sin^2 q}\right\}, \tag{64}$$

$$y = m_0a\left\{-E(q, e') + F(q, e') + e'^2\frac{\sin q\cos q\sqrt{1 - e'^2\sin^2 q}}{1 - e^2\sin^2 p - e'^2\sin^2 q}\right\}, \tag{65}$$

$$(66) \qquad m = m_0 \sqrt{1 + e'^2 \operatorname{tg}^2 B} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 p + e'^2 \sin^2 p \sin^2 q}{1 - e^2 \sin^2 p - e'^2 \sin^2 q}},$$

$$(67) \qquad \operatorname{tg} c = e'^2 \frac{\sin p \sin q \cos q}{\cos p \sqrt{1 - e^2 \sin^2 p} \sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q}}.$$

In Gleichung (62) sind die absoluten Argumente der beiden Funktionen $\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg} \leqq 1$, also die Werte dieser Funktionen reell.

8. *Bildgrenzen.* Da nach Gleichung (62)

$$(68) \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{e'^2 \cos p (\cos^2 q - e^2 \sin^2 p \sin^2 q) \sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q}}{(\cos^2 p + e'^2 \sin^2 p \sin^2 q)(e^2 \cos^2 p + e'^2 \cos^2 q)},$$

$$(69) \qquad \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{-e'^2 \sin p \sin q \cos q}{(\cos^2 p + e'^2 \sin^2 p \sin^2 q)(e^2 \cos^2 p + e'^2 \cos^2 q)} \cdot \frac{2e^2 \cos^2 p + e^2 e'^2 \sin^2 p \sin^2 q + e'^2 \cos^2 q}{\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q}}$$

und nach Gleichung (63)

$$(70) \qquad \frac{\partial L}{\partial p} = \frac{e'^2 \sin p \sin q \cos q}{(\cos^2 p + e'^2 \sin^2 p \sin^2 q)(e^2 \cos^2 p + e'^2 \cos^2 q)} \cdot \frac{2e^2 \cos^2 p + e^2 e'^2 \sin^2 p \sin^2 q + e'^2 \cos^2 q}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 p}},$$

$$(71) \qquad \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{e'^2 \cos p (\cos^2 q - e^2 \sin^2 p \sin^2 q) \sqrt{1 - e^2 \sin^2 p}}{(\cos^2 p + e'^2 \sin^2 p \sin^2 q)(e^2 \cos^2 p + e'^2 \cos^2 q)},$$

also die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial q} & \frac{\partial L}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} & \frac{\partial H}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{1}{(\cos^2 p + e'^2 \sin^2 p \sin^2 q)^2 (e^2 \cos^2 p + e'^2 \cos^2 q)^2}$$

$$\left[\cos^2 p (\cos^2 q - e^2 \sin^2 p \sin^2 q)^2 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 p} \sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q} + \frac{\sin^2 p \sin^2 q \cos^2 q (2e^2 \cos^2 p + e^2 e'^2 \sin^2 p \sin^2 q + e'^2 \cos^2 q)^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 p} \sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q}}\right] \geqq 0$$

ist, wird die Ebene der nicht isometrischen Hilfsparameter auf das Rotationsellipsoid ungefaltet abgebildet.

Setzt man $q = 0$, so werden in Gleichung (63) die Argumente der beiden Funktionen arc tg $= 0$, wenn $\cos p \neq 0$ ist; wählt man von den ∞ vielen Werten arc tg 0 den Wert 0, so wird $L = 0$.

Aus Gleichung (62) wird

$$H = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg} \sin p - e\, \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\, e \sin p.$$

Wächst p von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so wächst die isometrische Breite nach der letzten Gleichung von 0 bis ∞. Daher wird die Strecke auf der p-Achse von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ auf den Meridian mit der geographischen Länge 0 vom Äquator bis zum Nordpol abgebildet. Da in Gleichung (63) das Argument der ersten Funktion arc tg im Nordpol den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ hat, wird der Nordpol umgangen. Beim Umgang nach Osten beginnt diese Funktion arc tg mit dem Werte 0, wird für $p = \frac{\pi}{2}$ gleich $\frac{\pi}{2}$ und schließlich gleich π. Beim Umgang

nach Westen wird die Funktion arc tg für $p = \frac{\pi}{2}$ gleich $-\frac{\pi}{2}$ und schließlich gleich $-\pi$. Dieses Verhalten erkennt man auch aus der Richtungsabbildung im Nordpol.

$$L = \text{arc tg} - e' \frac{dq}{dp}.$$

Daher wird die Strecke auf der p-Achse von $\frac{\pi}{2}$ bis π auf den Meridian mit der geographischen Länge π vom Nordpol bis zum Äquator abgebildet.

Da auf der q-Achse nach Gleichung (62) $H = 0$ ist, wird diese auf den Äquator abgebildet. Wächst q von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so wachsen in Gleichung (63) die beiden Funktionen arc tg von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, also die geographische Länge $L = q - e \text{ arc tg } e \text{ tg } q$ von 0 bis $(1-e)\frac{\pi}{2}$. Daher wird die Strecke auf der q-Achse von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ auf den Äquator von der geographischen Länge 0 bis zur geographischen Länge $(1 - e)\frac{\pi}{2}$ abgebildet.

Da auf der Geraden

(72) $$p = \pi$$

nach Gleichung (62) $H = 0$ ist, wird diese auf den Äquator abgebildet. Wächst q von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so nimmt in Gleichung (63) die erste Funktion arc tg von π bis $\frac{\pi}{2}$ und die zweite Funktion arc tg von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$, also die geographische Länge $L = -q + e \text{ arc tg } e \text{ tg } q$ von π bis $(1 + e)\frac{\pi}{2}$ ab. Daher wird die Strecke auf der Geraden (72) von $q = 0$ bis $q = \frac{\pi}{2}$ auf den Äquator von der geographischen Länge π bis zur geographischen Länge $(1 + e)\frac{\pi}{2}$ abgebildet.

Auf der Geraden

(73) $$q = \frac{\pi}{2}$$

wäre nach Gleichung (62)

$$H = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\, e \sin p - e\, \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg} \sin p.$$

Ließe man p von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu- und von π bis $\frac{\pi}{2}$ abnehmen, so nähme die isometrische Breite von 0 bis $-\infty$ ab, d. h. der Punkt $p = \frac{\pi}{2}$, $q = \frac{\pi}{2}$ würde in den Südpol abgebildet. Längs dieser Strecken behielten nach Gleichung (63) die beiden Funktionen arc tg ihre Ausgangswerte. Für $p = \frac{\pi}{2}$ nähme das Argument der zweiten Funktion den unbestimmten Wert $0 \cdot \infty$ an. Diese Funktion ginge, wenn p wachsend den Wert $\frac{\pi}{2}$ durchliefe, von dem Werte $+\frac{\pi}{2}$ zu $-\frac{\pi}{2}$ über, aber nur bei Umgehung des Südpols in östlicher Richtung. Dieses Verhalten erkennt man auch aus der Richtungsabbildung im Südpol:

$$L = \frac{\pi}{2} - e \text{ arc tg } \frac{e}{e'} \frac{dp}{dq}.$$

Die Strecke auf der Geraden (73) von $p = 0$ bis $p = \frac{\pi}{2}$ würde auf den Meridian mit der

geographischen Länge $(1-e)\frac{\pi}{2}$ vom Äquator bis zum Südpol und die Strecke von $p=\pi$ bis $p=\frac{\pi}{2}$ auf den Meridian mit der geographischen Länge $(1+e)\frac{\pi}{2}$ vom Äquator bis zum Südpol abgebildet. Daher muß für das Stück des Äquators zwischen den geographischen Längen $(1-e)\frac{\pi}{2}$ und $(1+e)\frac{\pi}{2}$

$$0<p<\pi,\ 0<q<\frac{\pi}{2}$$

sein. Dieses Äquatorstück ist das Bild einer Kurve K in der Hilfsebene. Um die Steigungen dieser Kurve in den Punkten $p=0$ und $p=\pi$ zu bestimmen, wird in der aus der Abbildungsfunktion (62) für den Äquator folgenden Gleichung

$$\text{(74)}\qquad \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\left(\sin p\sqrt{1-e'^2\sin^2 q}\right)-e\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\frac{e\sin p}{\sqrt{1-e'^2\sin^2 q}}=0$$

$p=\Delta p$ und $\pi+\Delta p$, $q=\frac{\pi}{2}+\Delta q$ gesetzt:

$$-\frac{ee'^2}{3}\left(\frac{dp}{dq}\right)^3+\frac{e'^2}{e}\frac{dp}{dq}=0.$$

Diese in bezug auf die Steigung $\frac{dp}{dq}$ kubische Gleichung hat die eine Wurzel $\frac{dp}{dq}=0$; diese Wurzel bedeutet die Steigung der Strecken in der Hilfsebene, die in die Äquatorstücke zwischen den geographischen Längen 0 und $(1-e)\frac{\pi}{2}$ und den geographischen Längen $(1+e)\frac{\pi}{2}$ und π abgebildet werden. Die beiden anderen Wurzeln $\frac{dp}{dq}=\pm\frac{\sqrt{3}}{e}$ der kubischen Gleichung bedeuten die Steigungen in den Endpunkten der Kurve K.

Um die Steigung der den Meridian mit der geographischen Länge $(1-e)\frac{\pi}{2}$ ergebenden Kurve im Punkte $p=0$ zu bestimmen, wird in der aus der Abbildungsfunktion (63) für diesen Meridian folgenden Gleichung

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 p}\sin q}{\cos p\cos q}-e\operatorname{arc\,tg}\frac{e\cos p\sin q}{\sqrt{1-e^2\sin^2 p}\cos q}=(1-e)\frac{\pi}{2}$$

$p=\Delta p$, $q=\frac{\pi}{2}+\Delta q$ gesetzt und die Funktionen arc tg so umgeformt, daß ihre Argumente mit Δp und Δq nach 0 gehen:

$$\operatorname{arc\,ctg}-\frac{\cos\Delta p\sin\Delta q}{\sqrt{1-e^2\sin^2\Delta p}\cos\Delta q}-e\operatorname{arc\,ctg}-\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\Delta p}\sin\Delta q}{e\cos\Delta p\cos\Delta q}=(1-e)\frac{\pi}{2}.$$

Hierin werden die Funktionen arc ctg in die Mac Laurinsche Reihe

$$\text{(75)}\qquad \operatorname{arc\,ctg}x=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

entwickelt, worin die Integrationskonstante $=\frac{\pi}{2}$ gesetzt werden muß, da die Funktionen arc ctg für $\Delta p=0$, $\Delta q=0$ den Wert $\frac{\pi}{2}$ annehmen müssen; man erhält

$$-e'^2\left(\frac{dp}{dq}\right)^2\frac{dq}{dp}=0.$$

Die Doppelwurzel $\frac{dp}{dq}=0$ bedeutet die Steigung der die nördlichen Hälften der Meridiane mit den geographischen Längen $(1\mp e)\frac{\pi}{2}$ ergebenden Kurven in den Endpunkten der Kurve K; die dritte Wurzel $\frac{dq}{dp}=0$ bedeutet die Steigung der die südlichen Hälften dieser Meridiane ergebenden Geraden (73) in denselben Punkten.

Um den Verlauf der Kurve K zu bestimmen, geht man von ihrer impliziten Darstellung zur Parameterdarstellung über. Zu diesem Zwecke werden zwei neue Koordinaten so eingeführt, daß das Argument der einen Funktion $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ nur von einer Koordinate abhängt, wobei diese Funktion $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ zur Vereinfachung beseitigt wird. Mit der Transformation

$$e\sin p=\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta,\qquad \sqrt{1-e'^2\sin^2 q}=\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\beta$$

wird die Gleichung der den Äquator ergebenden Kurve

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{\alpha^2}{2e}\,\mathfrak{Sin}\,2\beta\right)=e\beta;$$

nach der einen Koordinate aufgelöst

$$\alpha=\sqrt{2e\frac{\mathfrak{Tg}\,e\beta}{\mathfrak{Sin}\,2\beta}}.$$

Hiermit ergeben die Transformationsformeln die Parameterdarstellung der Kurve K

$$e\sin p=\sqrt{e\,\mathfrak{Tg}\,e\beta\,\mathfrak{Tg}\,\beta} \tag{76}$$

$$\sqrt{1-e'^2\sin^2 q}=\sqrt{\frac{e\,\mathfrak{Tg}\,e\beta}{\mathfrak{Tg}\,\beta}}. \tag{77}$$

Wenn p von 0 oder π aus nach $\frac{\pi}{2}$ geht, also $\sin p$ von 0 bis 1 wächst, so ändert sich nach Gleichung (76) β monoton von 0 an; da α nach der zweiten Transformationsformel positiv, also β nach der ersten Transformationsformel $\gtrless 0$ ist, wächst β. Der größte Wert von β wird für $p=\frac{\pi}{2}$ erreicht, ist also nach Gleichung (76) die Wurzel der Gleichung

$$\mathfrak{Tg}\,e\beta\,\mathfrak{Tg}\,\beta=e.$$

Wenn β von 0 an wächst, nimmt $\sqrt{1-e'^2\sin^2 q}$ monoton zu, also q ab. Da in der Abbildungsfunktion (62) p nur als Argument der Funktion sin auftritt, haben die die Breitenkreise ergebenden Kurven die Symmetrieachse

$$p=\frac{\pi}{2}. \tag{78}$$

Die Gleichung (62) der die Breitenkreise ergebenden Kurven wird mit Hilfe der Gleichungen (68) und (69) differenziert:

$$\frac{dq}{dp}=\frac{\cos p(1-e'^2\sin^2 q)}{e'^2\sin p\sin q\cos q}\cdot\frac{1-e'^2\sin^2 q-e^2\sin^2 p-e^2+e^2\sin^2 p(1-e'^2\sin^2 q)}{1-e'^2\sin^2 q-e^2\sin^2 p+e^2-e^2\sin^2 p(1-e'^2\sin^2 q)}, \tag{79}$$

also

$$\left(\frac{dq}{dp}\right)_{p=\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}(1-e'^2\sin^2 q)}{e'^2\sin q\cos q}\,\frac{e'^2\cos^2 q - e^2e'^2\sin^2 q}{e'^2\cos^2 q + e^2e'^2\sin^2 q} = 0,$$

d. h. die die Breitenkreise ergebenden Kurven schneiden ihre eine Symmetrieachse (78) senkrecht. Da aus Gleichung (79)

$$\left(\frac{dp}{dq}\right)_{q=0} = e'^2\operatorname{tg} p\sin 0\,\frac{e'^2}{e'^2+e^2\cos^2 p} = 0$$

folgt, schneiden die die Breitenkreise ergebenden Kurven auch ihre andere Symmetrieachse, die p-Achse, senkrecht.

Geht man vom Punkte $p=\frac{\pi}{2}$ der Kurve K aus, läßt p konstant und q nach 0 abnehmen, so behält die erste Funktion arc tg ihren Wert $\frac{\pi}{2}$ und die zweite ihren Wert 0; aus Gleichung (62) wird

$$H = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\sqrt{1-e'^2\sin^2 q} - e\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\frac{e}{\sqrt{1-e'^2\sin^2 q}}. \tag{80}$$

Die isometrische Breite wächst von 0 bis $+\infty$. Daher wird die Strecke auf der Geraden (78) von der Kurve K bis zur p-Achse in den Meridian mit der geographischen Länge $\frac{\pi}{2}$ vom Äquator bis zum Nordpol abgebildet, so daß die rechten Winkel zwischen den die nördlichen Hälften der Meridiane mit den geographischen Längen $0, \frac{\pi}{2}$ und π und den Äquator ergebenden Kurven erhalten bleiben.

Ginge man vom Punkte $p=\frac{\pi}{2}$ der Kurve K aus, ließe p konstant und q nach $\frac{\pi}{2}$ zunehmen, so behielte die erste Funktion arc tg ihren Wert $\frac{\pi}{2}$ und die zweite ihren Wert 0; die isometrische Breite nähme nach Gleichung (80) von 0 bis $-\infty$ ab. Daher würde die Strecke auf der Geraden (78) von der Kurve K bis zur Geraden (73) in den Meridian mit der geographischen Länge $\frac{\pi}{2}$ vom Äquator bis zum Südpol abgebildet.

Nach Gleichung (68) ist $\frac{\partial H}{\partial p}=0$ und nach Gleichung (71) $\frac{\partial L}{\partial q}=0$, wenn Gleichung (78) oder Gleichung

$$\operatorname{ctg} q = e\sin p \tag{81}$$

erfüllt ist. Nach Gleichung (69) ist $\frac{\partial H}{\partial q}=0$ und nach Gleichung (70) $\frac{\partial L}{\partial p}=0$, wenn

$$q=0,\ p=\mp\frac{\pi}{2}.$$

Daher sind die Punkte, in denen die die Breitenkreise ergebenden Kurven die Richtung der p-Achse haben, und die Punkte, in denen die die Meridiane ergebenden Kurven die Richtung der q-Achse haben, die Kurven (78) und (81).

Da die isometrische Breite eine gerade Funktion von q und die geographische Länge eine ungerade Funktion von q ist, erhält man die andere Hälfte des nördlichen Halbellipsoids durch Spiegelung an der p-Achse. Da die isometrische Breite eine ungerade Funktion von p und die geographische Länge eine gerade Funktion von p ist, erhält man das südliche Halbellipsoid durch Spiegelung an der q-Achse.

Für die Differentialquotienten der Koordinaten x und y nach den isometrischen Hilfsparametern gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u};$$

die gewöhnlichen Differentialquotienten werden aus den Gleichungen (60) und (61) berechnet

$$\frac{du}{dp} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 p}}, \quad \frac{dv}{dq} = \frac{1}{\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q}}.$$

Da hiernach die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial x}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 p}\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q}} \geqq 0$$

ist, wird die Ebene der nicht isometrischen Hilfsparameter auch in die Bildebene ungefaltet abgebildet.

Der Meridian mit der geographischen Länge 0 wird vom Äquator bis zum Nordpol nach Gleichung (46) auf die x-Achse von 0 bis $m_0 a E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$ abgebildet; da $q = 0$ ist und p von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ läuft, ergibt Gleichung (64) dasselbe.

Für den Meridian mit der geographischen Länge π ist $q = 0$, also nach Gleichung (65) $y = 0$ und nach Gleichung (64)

$$x = m_0 a \left\{ E(p, e) - \frac{e^2 \sin p \cos p}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 p}} \right\};$$

vom Nordpol bis zum Äquator läuft p von $\frac{\pi}{2}$ bis π; daher wird die nördliche Hälfte dieses Meridians auf die x-Achse von $m_0 a E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$ bis $2 m_0 a E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$ abgebildet; da nach Gleichung (61) $v = 0$, also $u = F$, daher nach Gleichung (60) $p = am(F, e)$, also nach Gleichung (47) $p = B$ ist, wird nach Gleichung (66) auch der Meridian mit der geographischen Länge π mit der Längenvergrößerung m_0 abgebildet.

Auf der q-Achse ist nach Gleichung (64) $x = 0$ und nach Gleichung (65)

$$y = m_0 a \left\{ -E(q, e') + F(q, e') + \frac{e'^2 \sin q \cos q}{\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q}} \right\}.$$

Daher wird der Äquator von der geographischen Länge 0 bis zur geographischen Länge $(1 - e)\frac{\pi}{2}$ auf die y-Achse von 0 bis $m_0 a \left\{ -E\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) + F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) \right\}$ abgebildet.

Auf der Geraden (72) ist nach Gleichung (64)

$$x = 2 m_0 a E\left(\frac{\pi}{2}, e\right), \tag{82}$$

während Gleichung (65) dasselbe ergibt wie die q-Achse. Daher wird der Äquator von der geographischen Länge π bis zur geographischen Länge $(1 + e)\frac{\pi}{2}$ auf die Gerade (82) von $y = 0$ bis $y = m_0 a \left\{ -E\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) + F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) \right\}$ abgebildet.

Auf der Geraden (73) wäre nach Gleichung (65)

$$y = m_0 a\left\{-E\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) + F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right)\right\} \tag{83}$$

und nach Gleichung (64)

$$x = m_0 a\{E(p, e) - \operatorname{tg} p\sqrt{1 - e^2\sin^2 p}\}.$$

Ließe man p von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zunehmen, so nähme x von 0 bis $-\infty$ ab. Daher würde die südliche Hälfte des Meridians mit der geographischen Länge $(1-e)\frac{\pi}{2}$ vom Äquator bis zum Südpol auf die Gerade (83) von $x = 0$ bis $x = -\infty$ abgebildet. Ließe man p von π bis $\frac{\pi}{2}$ abnehmen, so nähme x von $2m_0 aE\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$ bis $+\infty$ zu. Daher würde die südliche Hälfte des Meridians mit der geographischen Länge $(1+e)\frac{\pi}{2}$ vom Äquator bis zum Südpol auf die Gerade (83) von $x = 2m_0 aE\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$ bis $x = +\infty$ abgebildet.

Da nach Gleichung (64) x eine ungerade Funktion von $p - \frac{\pi}{2}$ und nach Gleichung (65) y eine gerade Funktion von $p - \frac{\pi}{2}$ ist, hat das Äquatorbild die Symmetrieachse $x = m_0 aE\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$.

Die Längenvergrößerung kann nach Gleichung (66) gleich 0 werden, wenn $p = \pm\frac{\pi}{2}$ und $q = 0$ ist, d. h. nach Gleichung (62) in den Polen. Dort nimmt die Längenvergrößerung zunächst den unbestimmten Wert $\infty \cdot 0$ an. Aus Gleichung (67) folgt mit Gleichung (63)

$$\operatorname{tg} c = \frac{e'^2 \sin p \cos^2 q}{(1 - e^2\sin^2 p)\sqrt{1 - e'^2\sin^2 q}} \operatorname{tg}\left(L + e \operatorname{arc tg} \frac{e\cos p \sin q}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 p}\cos q}\right),$$

also im Nord- und Südpol $c = \pm L$, d. h. das Rotationsellipsoid wird auch in den Polen winkeltreu abgebildet. Daher ist dort die Längenvergrößerung von der Richtung unabhängig, also $= m_0$. Die Längenvergrößerung kann gleich ∞ werden, wenn $B = \pm\frac{\pi}{2}$ ist, d. h. in den Polen. Doch sind dort die Winkeltreue und Längenvergrößerung schon festgestellt. Die Längenvergrößerung kann auch gleich ∞ werden, wenn $p = \pm\frac{\pi}{2}$ und $q = \pm\frac{\pi}{2}$ ist. Diese Punkte liegen im Gegensatz zur Kugel außerhalb des Gebietes, das auf das gesamte Rotationsellipsoid abgebildet wird.

Das Äquatorbild schneidet seine Symmetrieachse wegen der Winkeltreue senkrecht. Gleichfalls wegen der Winkeltreue ist der Tangentenwinkel des Äquatorbildes an den Enden seiner geraden Teile stetig. Weiter hat wegen der Winkeltreue die Meridiankonvergenz nach Gleichung (67) auf den geraden Teilen des Äquatorbildes den Wert 0, auf dem Meridian mit der geographischen Länge $\frac{\pi}{2}$ den Wert $\frac{\pi}{2}$ und im Nordpol den unbestimmten Wert arc tg $0 \cdot \infty$.

Um das Bild des Äquators zwischen den geographischen Längen $(1 \pm e)\frac{\pi}{2}$ zu erhalten, werden in den Abbildungsfunktionen (64) und (65) für die nicht isometrischen Parameter die Werte aus den Gleichungen (76) und (77) eingesetzt:

$$x = m_0 a \left\{ E\left(\arcsin \sqrt{\frac{\operatorname{tg} e\beta \operatorname{tg} \beta}{e}}, e\right) - \frac{\sin 2\beta}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} e\beta} (e - \operatorname{tg} e\beta \operatorname{tg} \beta)(1 - e \operatorname{tg} e\beta \operatorname{tg} \beta)} \right\}$$

$$y = m_0 a \left\{ - E\left(\arcsin \frac{1}{e'} \sqrt{1 - \frac{e \operatorname{tg} e\beta}{\operatorname{tg} \beta}}, e'\right) + F\left(\arcsin \frac{1}{e'} \sqrt{1 - \frac{e \operatorname{tg} e\beta}{\operatorname{tg} \beta}}, e'\right) \right.$$
$$\left. + \frac{\sin 2\beta}{2} \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg} e\beta \operatorname{tg} \beta} \left(-e + \frac{\operatorname{tg} e\beta}{\operatorname{tg} \beta}\right)\left(1 - \frac{e \operatorname{tg} e\beta}{\operatorname{tg} \beta}\right)} \right\}$$

Für $p = \frac{\pi}{2}$ ist nach Gleichung (64)

$$x = m_0 a E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) \tag{84}$$

und nach Gleichung (65)

$$y = m_0 a \left\{ - E(q, e') + F(q, e') + \operatorname{tg} q \sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q} \right\}. \tag{85}$$

Daher wird die nördliche Hälfte des Meridians mit der geographischen Länge $\frac{\pi}{2}$ auf die Gerade (84) abgebildet.

Da x eine gerade Funktion von q und y eine ungerade Funktion von q ist, erhält man die andere Hälfte des nördlichen Halbellipsoids durch Spiegelung an der x-Achse. Da x eine ungerade Funktion von p und y eine gerade Funktion von p ist, erhält man das südliche Halbellipsoid durch Spiegelung an der y-Achse. Bei dieser Wahl der Abbildung wird das Rotationsellipsoid längs des Äquators von der geographischen Länge

$$(1 - e)\frac{\pi}{2} \text{ über } \frac{\pi}{2}, (1 + e)\frac{\pi}{2}, \pi, -(1 + e)\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \text{ bis } -(1 - e)\frac{\pi}{2}$$

geschnitten.

Wenn beim Rotationsellipsoid ebenso wie bei der Kugel das Netz der auf den Meridian mit der geographischen Länge 0 bezogenen geodätischen Parallelkoordinaten in das Netz der kartesischen Koordinaten abgebildet würde, so müßte die geographische Länge ψ, unter der eine geodätische Normale des Meridians mit der geographischen Länge 0 den Äquator zum ersten Male schneidet, den Wert $(1 - e)\frac{\pi}{2}$ annehmen, wenn jene Normale in den Äquator übergeht. Wird die größte geographische Breite, die eine kürzeste Linie erreicht, mit B_{max} bezeichnet, so ist nach A. M. Legendre [7])

$$\psi = \frac{e'}{\cos B_{max}} \left[\left(1 + \frac{e^2}{e'^2} \cos^2 B_{max}\right) \Pi\left(\frac{\pi}{2}, e \sin B_{max}, e'^2 \operatorname{tg}^2 B_{max}\right) \right.$$
$$\left. - \frac{e^2}{e'^2} \cos^2 B_{max} F\left(\frac{\pi}{2}, e \sin B_{max}\right) \right],$$

worin

$$\Pi(\vartheta, k, n) = \int_0^{\vartheta} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

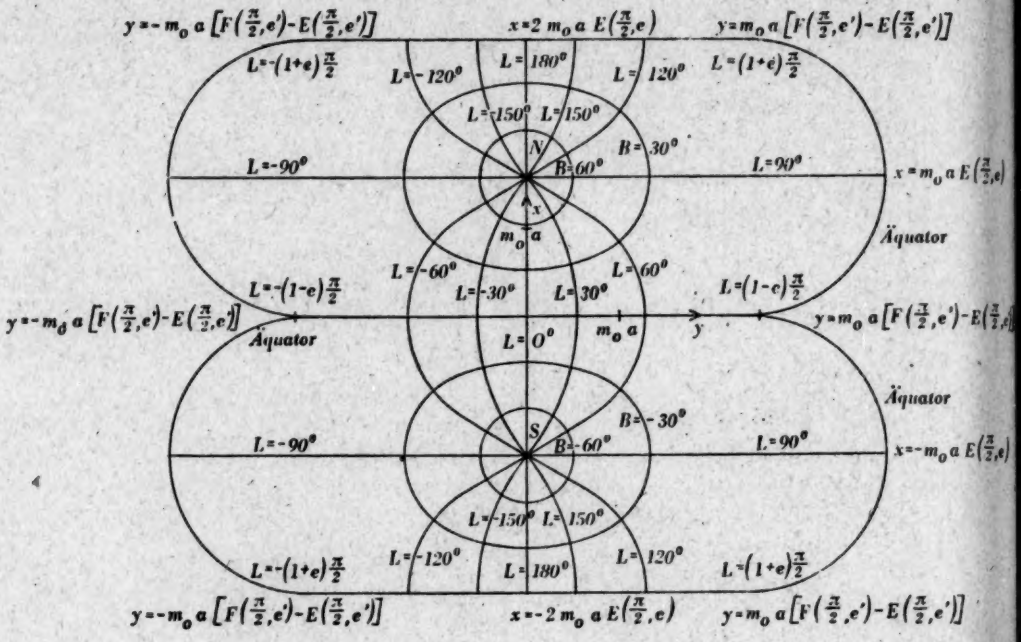
das elliptische Integral 3. Gattung mit der Amplitude und ϑ dem Modul k ist. Der Übergang in den Äquator ergibt

$$(\psi)_{B_{max}=0} = e' \frac{\pi}{2} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\pi}{2} > (1 - e)\frac{\pi}{2}.$$

---

[7]) A. M. Legendre, Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes 1, Paris 1825, S. 362.

Daher wird beim Rotationsellipsoid das Netz der auf den Meridian mit der geographischen Länge 0 bezogenen geodätischen Parallelkoordinaten nicht wie bei der Kugel in das Netz der kartesischen Koordinaten abgebildet.



9. *Parameterdarstellung der Breitenkreis- und Meridianbilder.* Um die Parameterdarstellung der Breitenkreisbilder und des Äquatorbildes zwischen den geographischen Längen $(1 \pm e)\frac{\pi}{2}$ zu erhalten, werden in den Abbildungsfunktionen (64) und (65) für die nicht isometrischen Hilfsparameter die Werte aus den Gleichungen (76) und (77) eingesetzt, worin das Argument $e\beta$ durch $e\beta + H$ ersetzt werden muß:

$$x = m_0 a\left\{E\left(\arcsin\sqrt{\frac{\mathfrak{Tg}(e\beta+H)\,\mathfrak{Tg}\,\beta}{e}}, e\right)\right.$$
$$\left. -\frac{\mathfrak{Sin}\,2\beta}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{Tg}\,\beta}{\mathfrak{Tg}(e\beta+H)}\left[e-\mathfrak{Tg}(e\beta+H)\,\mathfrak{Tg}\,\beta\right]\left[1-e\,\mathfrak{Tg}(e\beta+H)\,\mathfrak{Tg}\,\beta\right]}\right\},$$

$$y = m_0 a\left\{-E\left(\arcsin\frac{1}{e'}\sqrt{1-\frac{e\,\mathfrak{Tg}(e\beta+H)}{\mathfrak{Tg}\,\beta}}, e'\right)+F\left(\arcsin\frac{1}{e'}\sqrt{1-\frac{e\,\mathfrak{Tg}(e\beta+H)}{\mathfrak{Tg}\,\beta}}, e'\right)\right.$$
$$\left. +\frac{\mathfrak{Sin}\,2\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{Tg}(e\beta+H)\,\mathfrak{Tg}\,\beta}\left[-e+\frac{\mathfrak{Tg}(e\beta+H)}{\mathfrak{Tg}\,\beta}\right]\left[1-\frac{e\,\mathfrak{Tg}(e\beta+H)}{\mathfrak{Tg}\,\beta}\right]}\right\}.$$

Den Zusammenhang zwischen dem Kurvenparameter und der geographischen Länge ergibt die Abbildungsfunktion (63):

$$L = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\left[1-e\,\mathfrak{Tg}(e\beta+H)\,\mathfrak{Tg}\,\beta\right]\left[\mathfrak{Tg}\,\beta-e\,\mathfrak{Tg}(e\beta+H)\right]}{\left[e-\mathfrak{Tg}(e\beta+H)\,\mathfrak{Tg}\,\beta\right]\left[\mathfrak{Tg}(e\beta+H)-e\,\mathfrak{Tg}\,\beta\right]}}$$
$$-e\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\left[e-\mathfrak{Tg}(e\beta+H)\,\mathfrak{Tg}\,\beta\right]\left[\mathfrak{Tg}\,\beta-e\,\mathfrak{Tg}(e\beta+H)\right]}{\left[1-e\,\mathfrak{Tg}(e\beta+H)\,\mathfrak{Tg}\,\beta\right]\left[\mathfrak{Tg}(e\beta+H)-e\,\mathfrak{Tg}\,\beta\right]}}.$$

Mit der Transformation

$$\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 p}}{e\cos p} = \gamma\cos\delta,\quad \operatorname{tg} q = \gamma\sin\delta$$

wird die Abbildungsfunktion (63)

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{e}{2}\gamma^2\sin 2\delta\right) = e\delta + L;$$

nach der einen Koordinate aufgelöst:

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{e}\,\frac{\operatorname{tg}(e\delta+L)}{\sin 2\delta}}.$$

Hiermit ergeben die Transformationsformeln

$$\sin p = \sqrt{\frac{e\operatorname{tg}(e\delta+L)-\operatorname{tg}\delta}{e\operatorname{tg}(e\delta+L)-e^2\operatorname{tg}\delta}},\quad \cos p = \sqrt{\frac{e'^2\operatorname{tg}\delta}{e\operatorname{tg}(e\delta+L)-e^2\operatorname{tg}\delta}},$$

$$\operatorname{tg} q = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(e\delta+L)\operatorname{tg}\delta}{e}}.$$

Werden die Werte der nicht isometrischen Hilfsparameter in die Abbildungsfunktionen (64) und (65) eingesetzt, so erhält man die Parameterdarstellung der Meridianbilder:

$$x = m_0 a\left\{E\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{e\operatorname{tg}(e\delta+L)-\operatorname{tg}\delta}{e'^2\operatorname{tg}\delta}},\, e\right)\right.$$
$$\left. -\frac{\sin 2\delta}{2}\left[\operatorname{tg}(e\delta+L)\operatorname{tg}\delta+e\right]\sqrt{\frac{e\operatorname{tg}(e\delta+L)-\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}(e\delta+L)\operatorname{tg}\delta\left[\operatorname{tg}(e\delta+L)-e\operatorname{tg}\delta\right]}}\right\},$$

$$y = m_0 a\left\{-E\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(e\delta+L)\operatorname{tg}\delta}{e}},\, e'\right)+F\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(e\delta+L)\operatorname{tg}\delta}{e}},\, e'\right)\right.$$
$$\left. +\frac{\sin 2\delta}{2}\left[\operatorname{tg}(e\delta+L)-e\operatorname{tg}\delta\right]\sqrt{\frac{e\operatorname{tg}(e\delta+L)\operatorname{tg}\delta+1}{\operatorname{tg}(e\delta+L)\operatorname{tg}\delta\left[e+\operatorname{tg}(e\delta+L)\operatorname{tg}\delta\right]}}\right\}.$$

Den Zusammenhang zwischen dem Kurvenparameter und der geographischen Breite ergibt die Abbildungsfunktion (62):

$$H = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sqrt{\frac{\left[e\operatorname{tg}(e\delta+L)-\operatorname{tg}\delta\right]\left[1+e\operatorname{tg}(e\delta+L)\operatorname{tg}\delta\right]}{\left[\operatorname{tg}(e\delta+L)-e\operatorname{tg}\delta\right]\left[e+\operatorname{tg}(e\delta+L)\operatorname{tg}\delta\right]}}$$
$$-e\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sqrt{\frac{\left[e\operatorname{tg}(e\delta+L)-\operatorname{tg}\delta\right]\left[e+\operatorname{tg}(e\delta+L)\operatorname{tg}\delta\right]}{\left[\operatorname{tg}(e\delta+L)-e\operatorname{tg}\delta\right]\left[1+e\operatorname{tg}(e\delta+L)\operatorname{tg}\delta\right]}}.$$

10. *Numerische Bestimmung besonderer Werte.* Es ist[8]) $e^2 = 0{,}006674372230614_4^5$. Hieraus ergibt sich $e = 0{,}081696831215 2_{55}^{62}$, $e\frac{\pi}{2} = 7°21'9{,}7733137 4_2^{5}{}''$.

Um die Koordinate q_0 des Punktes zu berechnen, der den Punkt auf dem Äquator mit der geographischen Länge $\frac{\pi}{2}$ ergibt, wird in Gleichung (62) für die Koordinate p der Wert (78) eingesetzt:

$$\text{(86)}\qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sqrt{1-e'^2\sin^2 q_0} - e\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{e}{\sqrt{1-e'\sin^2 q_0}} = 0.$$

---

[8]) Vgl. Veröffentlichung des Königl. Preußischen Geodätischen Instituts 19; Lothabweichungen, Heft I, Formeln und Tafeln sowie einige numerische Ergebnisse für Norddeutschland (1886), S. 4.

Um diese Gleichung nach der Quadratwurzel aufzulösen, wird für die Quadratwurzel als Funktion der Exzentrizität der Fuchssche Ansatz gewählt. In dieser Reihe wird der kleinste Exponent mit n bezeichnet. Da nach der letzten Gleichung

$$(\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q_0})_{e=0} = 0$$

ist, muß $n > 0$ sein. Zur Abkürzung wird

$$\frac{e}{\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q_0}} = c$$

gesetzt. Damit $(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,c)_{e=0}$ reell ist, muß $n \leqq 1$ sein. Entwickelt man in Gleichung (86) die beiden Funktionen $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ in die MacLaurinsche Reihe, so sind die kleinsten Exponenten n und $2 - n$. Setzt man sie gleich, so folgt $n = 1$. Da außerdem die Koeffizienten nur gerade Potenzen der Exzentrizität enthalten, wird

$$\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q_0} = K_1 e + K_3 e^3 + K_5 e^5 + K_7 e^7 + K_9 e^9 + \cdots \tag{87}$$

gesetzt. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} c = {} & \frac{1}{K_1} - \frac{K_3}{K_1^2} e^2 + \frac{K_3^2 - K_1 K_5}{K_1^3} e^4 - \frac{K_3^3 - 2K_1 K_3 K_5 + K_1^2 K_7}{K_1^4} e^6 \\ & + \frac{K_3^4 - 3K_1 K_3^2 K_5 + 2K_1^2 K_3 K_7 + K_1^2 K_5^2 - K_1^3 K_9}{K_1^5} e^8 + \cdots, \end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q_0} = {} & K_1 e + \left(K_3 + \frac{K_1^3}{3}\right) e^3 + \left(K_5 + K_1^2 K_3 + \frac{K_1^5}{5}\right) e^5 \\ & + \left(K_7 + K_1^2 K_5 + K_1 K_3^2 + K_1^4 K_3 + \frac{K_1^7}{7}\right) e^7 \\ & + \left(K_9 + K_1^2 K_7 + 2K_1 K_3 K_5 + \frac{K_3^3}{3} + K_1^4 K_5 + 2K_1^3 K_3^2 + K_1^6 K_3 + \frac{K_1^9}{9}\right) e^9 + \cdots. \end{aligned}$$

Um $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,c$ als Funktion von e^2 in die MacLaurinsche Reihe zu entwickeln, werden zunächst die Differentialquotienten berechnet.

$$\frac{d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,c}{d(e^2)} = \frac{1}{1 - c^2} \frac{dc}{d(e^2)},$$

$$\frac{d^2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,c}{d(e^2)^2} = \frac{2c}{(1 - c^2)^2} \left[\frac{dc}{d(e^2)}\right]^2 + \frac{1}{1 - c^2} \frac{d^2c}{d(e^2)^2},$$

$$\frac{d^3\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,c}{d(e^2)^3} = 2\frac{1 + 3c^2}{(1 - c^2)^3} \left[\frac{dc}{d(e^2)}\right]^3 + \frac{6c}{(1 - c^2)^2} \frac{dc}{d(e^2)} \frac{d^2c}{d(e^2)^2} + \frac{1}{1 - c^2} \frac{d^3c}{d(e^2)^3},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,c}{d(e^2)^4} = {} & 24c\frac{1 + c^2}{(1 - c^2)^4} \left[\frac{dc}{d(e^2)}\right]^4 + 12\frac{1 + 3c^2}{(1 - c^2)^3} \left[\frac{dc}{d(e^2)}\right]^2 \frac{d^2c}{d(e^2)^2} \\ & + \frac{6c}{(1 - c^2)^2} \left[\frac{d^2c}{d(e^2)^2}\right]^2 + \frac{8c}{(1 - c^2)^2} \frac{dc}{d(e^2)} \frac{d^3c}{d(e^2)^3} + \frac{1}{1 - c^2} \frac{d^4c}{d(e^2)^4}. \end{aligned}$$

Hiermit und mit Gleichung (88) erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,c = {} & \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{K_1} - \frac{K_3}{K_1^2 - 1} e^2 + \left[\frac{K_3^2}{K_1(K_1^2 - 1)^2} + \frac{K_3^2 - K_1 K_5}{K_1(K_1^2 - 1)}\right] e^4 \\ & - \left[\frac{1}{3}\frac{(K_1^2 + 3) K_3^3}{K_1^2(K_1^2 - 1)^3} + 2K_3 \frac{K_3^2 - K_1 K_5}{K_1^2(K_1^2 - 1)^2} + \frac{K_3^3 - 2K_1 K_3 K_5 + K_1^2 K_7}{K_1^2(K_1^2 - 1)}\right] e^6 \\ & + \left[K_3^4 \frac{K_1^2 + 1}{K_1^3(K_1^2 - 1)^4} + \frac{K_3^2(K_1^2 + 3)(K_3^2 - K_1 K_5)}{K_1^3(K_1^2 - 1)^3} \right. \\ & + \frac{3K_3^4 - 6K_1 K_3^2 K_5 + 2K_1^2 K_3 K_7 + K_1^2 K_5^2}{K_1^3(K_1^2 - 1)^2} \\ & \left. + \frac{K_3^4 - 3K_1 K_3^2 K_5 + 2K_1^2 K_3 K_7 + K_1^2 K_5^2 - K_1^3 K_9}{K_1^3(K_1^2 - 1)}\right] e^8 + \cdots. \end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten von e ergibt

$$\mathfrak{Tg}\, K_1 = \frac{1}{K_1}. \tag{89}$$

Diese Gleichung hat[9]) die Wurzel $K_1 = 1{,}199\,67^{9}_{8}$. Um diese Wurzel genauer zu bestimmen, wird in der zur Vereinfachung des Zahlenrechnens umgeformten Gleichung (89)

$$K_1 \mathfrak{Sin}\, K_1 - \mathfrak{Cof}\, K_1 = 0$$

$K_1 = 1{,}199\,678 + \Delta_1 K_1$ gesetzt und die Verbesserung nach dem Newtonschen Näherungsverfahren bestimmt. Man erhält zunächst

$$(K \mathfrak{Sin}\, K - \mathfrak{Cof}\, K)_{K=1{,}199\,678} + (K_1 \mathfrak{Cof}\, K_1)_{K_1=1{,}199\,67;\,\Delta_1 K_1} = 0.$$

Hierbei wird in der MacLaurinschen Reihe der Funktion $K_1 \mathfrak{Cof}\, K_1$ der Rest

$$\frac{K_1^{13}}{12!} + \frac{K_1^{15}}{14!} + \cdots$$

durch die Majorante $\frac{K_1^{13}}{12!}\left[1 + \frac{K_1^2}{13 \cdot 14} + \left(\frac{K_1^2}{13 \cdot 14}\right)^2 + \cdots\right]$ abgeschätzt, die eine geometrische Reihe ist, und die Funktion $K \mathfrak{Sin}\, K - \mathfrak{Cof}\, K$ durch die Reihe

$$-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{2n}}{(2n-2)!\,2n}$$

berechnet. Es ergibt sich $\Delta_1 K_1 = 0{,}000\,000\,640\,25^{9}_{8}$.

Da K_1 in Gleichung (87) mit der numerischen Exzentrizität multipliziert wird, soll K_1 mit 16 Dezimalen berechnet werden. Daher wird bei der zweiten Verbesserung

$$K = 1{,}199\,678\,640\,256\,000^{1}_{0}$$

gesetzt. In der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{2n}}{(2n-2)!\,2n}$ wird der Rest $\frac{K^{22}}{20!\,22} + \frac{K^{24}}{22!\,24} + \cdots$ durch die Majorante $\frac{K^{22}}{20!\,22}\left[1 + \frac{K^2}{21 \cdot 24} + \left(\frac{K^2}{21 \cdot 24}\right)^2 + \cdots\right]$ abgeschätzt. Für den Divisor $K_1 \mathfrak{Cof}\, K_1$ ist der Wert $2{,}171\,6^{26}_{10}$ von der ersten Verbesserung genau genug. Jetzt ergibt sich

$$K_1 = 1{,}199\,678\,640\,257\,75^{12}_{08}.$$

Nach Koeffizientenvergleich in Gleichung (86) wird aus Gleichung (87)

$$\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q_0} = K_1 e + K_3 e^3 + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} K_1^2\right)(K_3 e^3) e^2 + \left(\frac{14}{27} - \frac{26}{45} K_1^2 + \frac{17}{105} K_1^4\right)(K_3 e^3) e^4 + \left(\frac{35}{81} - \frac{62}{45} K_1^2 + \frac{1718}{4725} K_1^4 - \frac{62}{945} K_1^6\right)(K_3 e^3) e^6 + \cdots,$$

worin

$$K_3 = -\frac{K_1(K_1^2 - 1)}{3}$$

ist, also

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q_0} = {} & 0{,}098\,009\,943\,856^{93}_{84} \\ & - 0{,}000\,095\,774\,557\,813^{1}_{3} \\ & - 0{,}000\,000\,058\,154\,492^{2}_{1} \\ & - 0{,}000\,000\,000\,095\,271^{1}_{0} \\ & + 0{,}000\,000\,000\,028\,284^{9}_{8} + \cdots.\end{aligned}$$

[9]) F. Emde, Tafeln elementarer Funktionen, Leipzig und Berlin 1940, S. 131, 2.

Die Teilsumme aus den ersten 4 oder 5 Summanden ist $0{,}0979141106^{61}_{57}$. Um den Zusammenhang dieser Teilsumme mit $\sqrt{1-e'^2\sin^2 q_0}$ festzustellen, wird in der linken Seite der Gleichung (86) für die Quadratwurzel das eine Mal der Wert $0{,}0979141106^{2}_{1}$ und das andere Mal der Wert $0{,}0979141105^{7}_{6}$ eingesetzt. In der MacLaurinschen Reihe des Summanden $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sqrt{1-e'^2\sin^2 q_0}$ wird der Rest

$$\frac{\sqrt{1-e'^2\sin^2 q_0}^{11}}{11}+\frac{\sqrt{1-e'^2\sin^2 q_0}^{13}}{13}+\frac{\sqrt{1-e'^2\sin^2 q_0}^{15}}{15}+\cdots$$

durch die Majorante

$$\frac{\sqrt{1-e'^2\sin^2 q_0}^{11}}{11}\left(1+\sqrt{1-e'^2\sin^2 q_0}^{2}+\sqrt{1-e'^2\sin^2 q_0}^{4}+\cdots\right)$$

abgeschätzt:

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{e}{0{,}0979141106^{2}_{1}}=\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,0{,}834372397^{4}_{3}7=\frac{1}{2}\ln\frac{1{,}834372397^{4}_{3}7}{0{,}165627602^{6}_{5}3}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 11{,}0752819^{55}_{47}=\frac{1}{2}\ln\left((11{,}0752+0{,}0000819^{55}_{47}\right).$$

Hieraus folgt durch Taylorsche Entwicklung mit dem Lagrangeschen Rest

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{e}{0{,}0979141106^{2}_{1}}=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{32\cdot 3461}{100^2}+\frac{0{,}0000819^{55}_{47}}{11{,}0752^{9}_{0}}\right).$$

Hierin wird der Logarithmus nach der Tafel von Vega[10]) berechnet. Hiermit folgt

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,0{,}0979141106^{2}_{1}-e\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{e}{0{,}0979141006^{2}_{1}}=0{,}000000000^{1}_{0}5.$$

Da

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{e}{0{,}0979141105^{7}_{6}}=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{32\cdot 3461}{100^2}+\frac{0{,}0000819^{56}_{78}}{11{,}075^{3}_{2}}\right)$$

ist, braucht der Logarithmus nicht neu gerechnet zu werden. Also ist

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,0{,}0979141105^{7}_{6}-e\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{e}{0{,}0979141105^{7}_{6}}=-0{,}000000000^{9}_{1}.$$

Demach ist die obere und untere Schranke jener Teilsumme nach dem Satze von Bolzano zugleich obere und untere Schranke von

$$\sqrt{1-e'^2\sin^2 q_0}=0{,}097914110^{61}_{57}.$$

Zur Abkürzung wird

$$\sqrt{1-e'^2\sin^2 q_0}=w_0$$

gesetzt. Hiermit wird Gleichung (86)

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,w_0-e\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{e}{w_0}=0.$$

Um die Wurzel w_0 genauer zu bestimmen, wird

$$w_0=0{,}09791411057+\Delta_1 w_0$$

gesetzt und die Verbesserung nach dem Newtonschen Näherungsverfahren bestimmt:

$$\left(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,w-e\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{e}{w}\right)_{w=0{,}09791411057}+\left(\frac{e^2}{w_0^2-e^2}+\frac{1}{1-w_0^2}\right)_{w_0=0{,}0979141105\frac{7}{6}}\Delta_1 w_0=0.$$

---

[10]) G. Vega, Thesaurus logarithmorum completus, Lipsiae 1794, S. 642—684.

Um hierin $\frac{e}{w}$ so genau wie möglich zu berechnen, wird

$$w = 0{,}0979141105700000^{1}_{0}$$

gesetzt. Die Mac Laurinsche Reihe des Summanden $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,w$ wird nach der 15. Potenz abgebrochen. Es ist

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,w - e\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{e}{w} = -0{,}000000000025\,9^{6}_{0},\quad \frac{e^2}{w_0^2 - e^2} + \frac{1}{1 - w_0^2} = 3{,}301073\,2^{6}_{8}2.$$

Da bei der Division dieser Zahlen der durch die Ungenauigkeit der Exzentrizität und der Zahl w_0 verursachte Fehler des Nenners gegen den nur durch die Ungenauigkeit der Exzentrizität verursachten Fehler des Zählers verschwindet, ist die größtmögliche Genauigkeit erreicht. Man erhält

$$\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q_0} = 0{,}0979141105778^{7}_{4}.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{ctg} q_0 = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 q_0} - 1} = 0{,}05423095669\,0^{5}_{6}.$$

Hieraus wird q_0 mit der alternierenden Reihe (75) berechnet, deren absolute Summanden eine monotone Nullfolge bilden, und die nach der 9. Potenz abgebrochen wird. Es ergibt sich

$$q_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1871{,}37600\,3^{6}_{2}''}{\pi}.$$

Hierin muß $\pi = 3{,}14159265358\,9^{8}_{7}$ gesetzt werden. Damit erhält man schließlich

$$q_0 = \frac{\pi}{2} - 9'55{,}67748\,16^{9}_{6}''$$

Die Bildlänge des halben Meridians mit der geographischen Länge 0 ist $m_0 a E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$. Nach Láska[11]) ist

$$E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 3e^4 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 5e^6 - \cdots\right].$$

In dieser Reihe wird der Rest

$$-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 14}\right)^2 13e^{14} - \cdots$$

durch die Minorante

$$-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 12}\right)^2 11e^{14}(1 + e^2 + e^4 + \cdots) = -\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 12}\right)^2 11e^{12}\frac{e^2}{e'^2}$$

$$> -\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 12}\right)^2 11e^{12}\frac{0{,}009}{0{,}9} = -\frac{1}{100}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 12}\right)^2 11e^{12}$$

abgeschätzt, so daß der negative Rest größer ist als der 100. Teil des letzten berechneten Summanden. Man erhält

$$E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = 1{,}56817201773213\,0^{9}_{2}.$$

---

[11]) A. a. O. [5]), S. 333.

Eine besser konvergierende Reihe erhält man durch Übergang zum doppelten Argument:

$$E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 p}\, dp = \sqrt{1 - \frac{e^2}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{e^2}{2 - e^2} \cos 2p}\, dp$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{e^2}{2}} \left\{1 - \frac{1}{2^2}\left[\frac{e^2}{2(2-e^2)}\right]^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 4^2}\left[\frac{e^2}{2(2-e^2)}\right]^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^2 4^2 6^2}\left[\frac{e^2}{2(2-e^2)}\right]^6 - \cdots\right\}.$$

Diese Reihe wird durch die hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 1 \cdot 2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

ausgedrückt:

$$E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{e^2}{2}}\, F\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, \left[\frac{e^2}{2 - e^2}\right]^2\right).$$

Dies ist eine Formel von E. E. Kummer[12]). Nun ist

$$\left[\frac{e^2}{2 - e^2}\right]^2 = 0{,}00001121151613964\frac{0}{4}.$$

Der Rest

$$-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2^2 4^2 6^2 8^2}\left[\frac{e^2}{2(2-e^2)}\right]^8 - \cdots$$

wird durch die Minorante

$$-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^2 4^2 6^2}\left[\frac{e^2}{2(2-e^2)}\right]^6 \frac{11}{16} 0{,}000\,012 \left\{1 + \left[\frac{e^2}{2-e^2}\right]^2 + \left[\frac{e^2}{2-e^2}\right]^4 + \cdots\right\}$$

$$> -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^2 4^2 6^2}\left[\frac{e^2}{2(2-e^2)}\right]^6 \frac{11}{16}\frac{10}{9} 0{,}000\,012 > -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^2 4^2 6^2}\left[\frac{e^2}{2(2-e^2)}\right]^6 0{,}000\,012$$

abgeschätzt. So ergibt sich wiederum:

$$E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = 1{,}56817201773213\frac{0}{2}.$$

Ich habe den Wert von $E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$ auch noch nach drei weiteren Formeln von Kummer[13]) berechnet. Es ergibt sich stets dasselbe Resultat mit der gleichen Genauigkeit.

Zum Vergleich wird das vollständige elliptische Integral durch die Landensche Substitution mit *abnehmendem* Modul berechnet:

---

[12]) E. E. Kummer, Über die hypergeometrische Reihe, Journal für die reine und angewandte Mathematik 15 (1836), S. 146, Formel 36.

[13]) A. a. O. [11]), Formel 37, 38, 39. Bei Kummer muß S. 77, Formel 43, auf der rechten Seite als 3. Argument $\beta + \frac{1}{2}$ statt $2\alpha - 2\beta + 1$ stehen.

$$E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e'^2 \sin^2 p + \cos^2 p}\, dp.$$

Werden die Koeffizienten von $\cos^2 p$ und $\sin^2 p$ mit a_0^2 und b_0^2 bezeichnet, also

$$a_0 = 1,\ b_0 = e',$$

und hieraus fortlaufend die arithmetischen und geometrischen Mittel gebildet:

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2},\ b_1 = \sqrt{a_0 b_0},$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2},\ b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

so haben die abnehmende Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und die zunehmende Folge $b_0, b_1, b_2, \ldots$ denselben Grenzwert, das arithmetisch-geometrische Mittel der Zahlen a_0 und b_0. Wird dieses mit $M(1, e')$ bezeichnet und

$$\frac{a_0 - b_0}{2a_1} = k_1,\ \frac{a_1 - b_1}{2a_2} = k_2, \ldots$$

gesetzt, so ist nach O. Schlömilch [14])

$$E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{M(1, e')}\left\{1 - \frac{e^2}{2}\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{4} + \frac{k_1 k_2 k_3}{8} + \cdots\right)\right\},$$

$a_0 = 1,$ $\qquad b_0 = e' = 0{,}99665722681842_{07}^{13},$

$a_1 = \frac{1 + e'}{2} = 0{,}99832861340921_{3}^{07},$ $\qquad b_1 = \sqrt{e'} = 0{,}99832721430321_{66}^{70},$

$a_2 = 0{,}99832791385621_{4}^{39},$ $\qquad b_2 = 0{,}99832791385596_{3}^{88},$

$a_3 = 0{,}99832791385609_{08}^{14},$ $\qquad b_3 = 0{,}99832791385609_{0}^{32},$

$M(1, e') = 0{,}99832791385609_{0}^{2},$

$k_1 = \frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0} = \frac{1 - e'}{1 + e'} = 0{,}00167418480081_{59}^{63},$

$k_2 = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} = \left(\frac{1 - \sqrt{e'}}{1 + \sqrt{e'}}\right)^2,$

$\frac{k_2}{4} = \left(\frac{\frac{1 - \sqrt{e'}}{2}}{1 + \sqrt{e'}}\right)^2 = 0{,}00000017518116721_{4}^{25}3,$

$k_3 = \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2} = \left(\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{b_1}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1}}\right)^2 = 0{,}00000000000012275376_{4}^{58}.$

Der Summand $\frac{k_1 k_2 k_3}{8}$ ist der letzte und verschwindet gegen $\frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{4}$. Auf diese Weise erhält man

$$E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = 1{,}56817201773214_{28}^{34}.$$

Das Ergebnis des arithmetisch-geometrischen Mittels ist weniger genau als das der hypergeometrischen Reihen.

---

[14]) O. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis 2, 4. Auflage, Braunschweig 1895, S. 315, Gleichung 32).

Die Bildlänge des Äquators von der geographischen Länge 0 bis zur geographischen Länge $(1-e)\frac{\pi}{2}$ oder von der geographischen Länge $(1+e)\frac{\pi}{2}$ bis zur geographischen Länge π ist $m_0 a\left\{-E\left(\frac{\pi}{2}, e'\right)+F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right)\right\}$. Nach Schlömilch[15]) ist

$$F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right)=\ln\frac{4}{e}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot 2}\right)e^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}\right)e^4$$
$$+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\left(\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}-\frac{2}{5\cdot 6}\right)e^6+\cdots,$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, e'\right)=1+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{e}-\frac{1}{1\cdot 2}\right)e^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}\left(\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)e^4$$
$$+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{5}{6}\left(\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}-\frac{1}{5\cdot 6}\right)e^6+\cdots,$$

also

$$F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right)-E\left(\frac{\pi}{2}, e'\right)=\ln\frac{4}{e}-1-\frac{1}{2^2}\ln\frac{4}{e}e^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4^2}\left(\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{3\cdot 4}\right)e^4$$
$$-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{5}{6^2}\left(\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{4}{5\cdot 6}\right)e^6-\cdots.$$

Nun ist

$$\ln\frac{4}{e}=\frac{1}{2}\ln\frac{16}{e^2}=\frac{1}{2}\left(\ln 16-\ln 0{,}006674372230615^5_4\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln 16-\frac{1}{2}\ln\left(0{,}0066743721+0{,}000000000130615^5_4\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln 16-\frac{1}{2}\ln 0{,}0066743721-\frac{1}{2}\frac{0{,}000000000130615^5_4}{0{,}0066743721^3_1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{16\cdot 100^5}{9\cdot 121\cdot 61289}-0{,}00000000978470.$$

Die Berechnung ergibt, unter Benutzung der Zerlegung $61289=167\cdot 367$:

$$\ln\frac{16\cdot 100^5}{9\cdot 121\cdot 167\cdot 367}=7{,}78206886877592^5_2,\quad \ln\frac{4}{e}=3{,}89103442460330.$$

Um den Rest abzuschätzen, beachte man, daß die Reihe

$$\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{5\cdot 6}+\cdots=2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots\right)$$

die Summe $2\ln 2=\ln 4$ hat. Daher hat die abnehmende Folge

$$\ln\frac{4}{e},$$
$$\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{3\cdot 4}=\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{1}{3},$$
$$\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{4}{5\cdot 6}=\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}-\frac{2}{5\cdot 6}+\frac{1}{5},$$

den positiven Grenzwert

$$\ln\frac{1}{e}=-\ln e.$$

---

[15]) A. a. O. [14]), S. 322, Gleichung 42, bzw. S. 323, Gleichung 44.

In der Reihe für die Differenz der vollständigen elliptischen Integrale 1. Gattung mit dem Modul e' wird der Rest

$$-\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\right)^2\frac{11}{12^2}\left(\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot2}-\frac{2}{3\cdot4}-\frac{2}{5\cdot6}-\frac{2}{7\cdot8}-\frac{2}{9\cdot10}+\frac{10}{11\cdot12}\right)e^{12}+\cdots$$

durch die Minorante

$$-\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\right)^2\frac{1}{12}\left(\ln\frac{4}{e}-\frac{2}{1\cdot2}-\frac{2}{3\cdot4}-\frac{2}{5\cdot6}-\frac{2}{7\cdot8}+\frac{8}{9\cdot10}\right)e^{12}(1+e^2+e^4+e^6+\cdots)$$

abgeschätzt, die aus dem letzten berechneten Summanden durch Multiplikation mit

$$\frac{100}{108}\frac{e^2}{e'^2}<\frac{100}{108}0{,}007<\frac{1}{154}$$

entsteht. Man erhält schließlich

$$F\left(\frac{\pi}{2},e'\right)-E\left(\frac{\pi}{2},e'\right)=2{,}884\,535\,469\,976\,6_1^6.$$

Die Landensche Substitution mit *zunehmendem* Modul ergibt[16])

$$F\left(\frac{\pi}{2},e'\right)-E\left(\frac{\pi}{2},e'\right)=\frac{1+e'^2}{1+e'}F(q_1,e_1')-(1+e')E(q_1,e_1')+e',$$

worin

$$\cos 2q_1=-e',\quad e_1'=\frac{2\sqrt{e'}}{1+e'}$$

ist. Die Amplitude q_1 wird aus der Gleichung $\sin 2q_1=e$ berechnet. Es wird

$$2q_1=\pi-e-\frac{1}{2}\frac{e^3}{3}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{e^5}{5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{e^7}{7}-\cdots$$

Der Rest $-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}\frac{e^{13}}{13}-\cdots$ ist negativ und sein absoluter Betrag

$$<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}\frac{e^{13}}{13}(1+e^2+e^4+\cdots)<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\frac{e^{11}}{11}\frac{11\cdot11}{12\cdot13}\frac{e^2}{e'^2}$$

$$<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\frac{e^{11}}{11}\frac{11}{13}e^2<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\frac{e^{11}}{11}0{,}006$$

und

$$>\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}\frac{e^{13}}{13}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\frac{e^{11}}{11}\frac{11\cdot11}{12\cdot13}e^2>\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\frac{e^{11}}{11}\frac{11\cdot11}{12\cdot13}0{,}006$$

$$>\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\frac{e^{11}}{11}\frac{11}{13}0{,}005>\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\frac{e^{11}}{11}0{,}004.$$

Man erhält

$$q_1=\frac{\pi}{2}-0{,}040\,893\,992\,217\,09_4^0.$$

Die Amplitude q_1 kann auch aus der Gleichung

$$\cos q_1=\sqrt{\frac{1-e'}{2}}=0{,}040\,882\,595\,206\,14_2^8$$

berechnet werden. Hier wird

---

[16]) Vgl. O. Schlömilch, a. a. O. [14]), S. 303, Gleichung 22, u. S. 310, Gleichung 24.

$$q_1 = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{1-e'}{2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1-e'}{2}}^3 - \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1-e'}{2}}^5 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1-e'}{2}}^7 - \cdots$$

Der Rest $-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\frac{1}{9}\sqrt{\frac{1-e'}{2}}^9 - \cdots$ ist negativ und sein absoluter Betrag

$$< \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\frac{1}{9}\sqrt{\frac{1-e'}{2}}^9\left[1 + \frac{1-e'}{2} + \left(\frac{1-e'}{2}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\frac{1}{9}\frac{\sqrt{\frac{1-e'}{2}}}{\frac{1+e'}{2}}$$

$$= \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1-e'}{2}}^7\frac{7\cdot7}{8\cdot9}\frac{1-e'}{1+e'} < \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1-e'}{2}}^7\frac{7\cdot7}{8\cdot9}\,0{,}00168$$

$$< \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1-e'}{2}}^7\,0{,}00115$$

und

$$> \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\frac{1}{9}\sqrt{\frac{1-e'}{2}}^9 = \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1-e'}{2}}^7\frac{7\cdot7}{8\cdot9}\frac{1-e'}{2}$$

$$> \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1-e'}{2}}^7\frac{7\cdot7}{8\cdot9}\,0{,}00167 > \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1-e'}{2}}^7\,0{,}00113.$$

Man erhält

$$q_1 = \frac{\pi}{2} - 0{,}040893992217^{100}_{093}.$$

Ferner ist

$$e_1' = 0{,}999998598551\,64^{47}_{30}.$$

Nach zweimaliger Substitution erhält man

$$F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) = \left(\frac{1+e'}{1+\sqrt{e'}}\right)^2 F(q_2, e_2') - (1+\sqrt{e'})^2\,E(q_2, e_2') + 2\sqrt{e'}\sin q_1 + e'$$

mit

$$\sin(2q_2 - q_1) = e_1' \sin q_1, \quad e_2' = \frac{2\sqrt{e_1'}}{1+e_1'}.$$

Die Amplitude q_2 wird aus der Gleichung

$$\cos\left(q_2 + \frac{\frac{\pi}{2} - q_1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - e_1' \sin q_1}{2}}$$

berechnet. Es ergibt sich

$$\sin q_1 = \sqrt{\frac{1+e'}{2}} = 0{,}99916395722084^{11}_{08},$$

$$\sqrt{\frac{1 - e_1' \sin q_1}{2}} = 0{,}02046268623\,42^{8}_{5},$$

$$q_2 + \frac{\frac{\pi}{2} - q_1}{2} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{1 - e_1' \sin q_1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1 - e_1' \sin q_1}{2}}^3 - \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1 - e_1' \sin q_1}{2}}^5$$

$$- \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1 - e_1' \sin q_1}{2}}^7 - \cdots.$$

Der Rest $-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}}^7 - \cdots$ ist negativ und sein absoluter Betrag

$$< \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}}^7\left[1+\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}+\left(\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}\right)^2+\cdots\right]$$

$$= \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}}^5\frac{5\cdot5}{6\cdot7}\frac{\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}}{1-\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}} < \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}}^5\frac{5\cdot5}{6\cdot7}\frac{0{,}00042}{0{,}99}$$

$$= \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}}^5\frac{0{,}0105}{41{,}58} < \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}}^5 0{,}00026$$

und

$$> \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}}^7 = \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}}^5\frac{5\cdot5}{6\cdot7}\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}$$

$$> \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}}^5\frac{5\cdot5}{6\cdot7}0{,}00041 > \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}}^5\frac{0{,}01025}{42}$$

$$> \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1-e_1'\sin q_1}{2}}^5 0{,}00024.$$

Hieraus folgt:

$$q_2 = \frac{\pi}{2} - 0{,}0409111106398^5_1,\quad e_2' = 0{,}99999999999975^5_4.$$

Nach dreimaliger Substitution erhält man

$$F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) = \frac{2(1+e')^2-(1-\sqrt{e'})^4}{(\sqrt{1+e'}+\sqrt{2\sqrt{e'}})^2}F(q_3, e_3') - (\sqrt{1+e'}+\sqrt{2\sqrt{e'}})^2 E(q_3, e_3')$$

$$+ 2\sqrt{2(1+e')\sqrt{e'}}\sin q_2 + \sqrt{2e'+2e'^2} + e'$$

mit

$$\cos\left(q_3 + \frac{\frac{\pi}{2}-q_2}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e_2'\sin q_2}{2}},\quad e_3' = \frac{2\sqrt{e_2'}}{1+e_2'}.$$

$\sin q_2$ wird aus der Gleichung

$$2\sin^2 q_2 = 1 + \sqrt{e'} \mp \frac{1-e'}{\sqrt{2(1+e')}}$$

berechnet. Da

$$2\sin^2 q_2 < 2\sin^2 q_1 = 1 + e'$$

ist, gilt von dem Doppelvorzeichen nur das obere Zeichen. Es wird

$$\sin q_2 = 0{,}999163257228896^3_0,$$

$$\sqrt{\frac{1-e_2'\sin q_2}{2}} = 0{,}020454128817^{21}_{23},$$

$$q_2 = \frac{\pi}{2} - 0{,}040911110642^{36}_{79},\quad e_3' = {}^{1}_{0{,}999\,999\,999\,999\,958}.$$

Im Grenzfall ist

$$F(q_3, 1) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin q_3}{1-\sin q_3}.$$

$\sin q_3$ wird aus der Gleichung

$$2\sin^2 q_3 = 1 + e_2'\sin^2 q_2 \mp \cos q_2\sqrt{1 - e_2'^2\sin^2 q_2}$$

berechnet. Da

$$2\sin^2 q_3 < 2\sin^2 q_2 = 1 + e_1'\sin^2 q_1 - \cos q_1\sqrt{1 - e_1'^2\sin^2 q_1} < 1 + e_1'$$
$$< \frac{1 + e_1'}{1 + e_1' - \sqrt{e_1'}} = \frac{2}{2 - e_2'},$$

also

$$\sin^2 q_2 < \frac{1}{2 - e_2'},$$

$$(2 - e_2')\sin^2 q_2 < 1, \quad 2\sin^2 q_3 < 2\sin^2 q_2 < 1 + e_2'\sin^2 q_2$$

ist, gilt von dem Doppelvorzeichen nur das obere Zeichen. Man findet

$$\sin q_3 = 0{,}99916325722877_2^5,$$

also

$$F(q_3, 1) = \frac{1}{2}\ln 2389{,}2208286_{36}^{44} = \frac{1}{2}\ln 4 \cdot 597{,}30520711_{59}^{61}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln 4 + \ln (597{,}305\,2 + 0{,}0000071_{59}^{61})\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{68 \cdot 68 \cdot 5167}{100^2} + \frac{0{,}0000071_{59}^{61}}{597{,}305\,20_0^5}\right] = 3{,}88936128932_4^7.$$

Setzt man an:

$$F(q_3, 1) = \ln \operatorname{ctg}\frac{\frac{\pi}{2} - q_3}{2}$$

mit

$$\cos\frac{\frac{\pi}{2} - q_3}{2} = \cos 0{,}020455555321_{30}^{43} = 0{,}99979079242328_7^89,$$

$$\sin\frac{\frac{\pi}{2} - q_3}{2} = 0{,}02045412881_{77}^{82},$$

so folgt

$$F(q_3, 1) = \ln 48{,}8796565_{28}^{30} = \ln (48{,}879648 + 0{,}00000859_{28}^{30})$$
$$= \ln\frac{32 \cdot 387 \cdot 3947}{1000^2} + \frac{0{,}00000859_{28}^{30}}{48{,}8796_{48}^{57}} = 3{,}88936128932_3^9.$$

Der Ausdruck $\frac{1}{2}\ln\frac{1 + \sin q_3}{1 - \sin q_3}$ ergibt also eine genauere Zahl als der Ausdruck $\ln \operatorname{ctg}\frac{\frac{\pi}{2} - q_3}{2}$.

Nunmehr folgt

$$F(q_3, e_3') = F(q_3, 1) - \frac{1 - e_3'^2}{2}\int_0^{q_3}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - e_3'^2\sin^2\varphi^3}}\,d\varphi,$$

wo

$$\int_0^{q_3}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - e_3'^2\sin^2\varphi^3}}\,d\varphi \leqq \int_0^{q_3}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}}\,d\varphi = \int_0^{q_3}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Nach Dölp und Netto[17]) ist

$$\int_0^{q_3} \frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}\,d\varphi = \frac{\sin q_3}{2\cos^2 q_3} - \frac{1}{2}F(q_3, 1).$$

Hiermit folgt

$$F(q_3, e_3') = 3{,}889361289\,32_3^7.$$

Ferner ist

$$E(q_3, e_3') = \sin q_3 + \frac{1 - e_3'^2}{2}\int_0^{q_3} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - e_3'^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi,$$

wo

$$\int_0^{q_3} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e_3'^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi \leqq \int_0^{q_3} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \int_0^{q_3} \frac{1-\cos^2\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi = F(q_3, 1) - \sin q_3.$$

Daher ergibt sich

$$E(q_3, e_3') = 0{,}999163257\,2287_{72}^{81}.$$

Schließlich ist

$$\frac{2(1+e')^2 - (1-\sqrt{e'})^4}{\left(\sqrt{1+e'} + \sqrt{2\sqrt{e'}}\right)^2} = 0{,}998329312961\,86_4^6,$$

$$\left(\sqrt{1+e'} + \sqrt{2\sqrt{e'}}\right)^2 = 7{,}986623310848\,5_{26}^{31},$$

$$2\sqrt{2(1+e')\sqrt{e'}} = 3{,}993311655\,42387_2^6,$$

$$\sqrt{2e' + 2e'^2} = 1{,}994985140\,08892_0^2,$$

also

$$F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) = 2{,}884535\,4699_{74}^{80}.$$

Das Ergebnis der Landenschen Substitution mit zunehmendem Modul ist weniger genau als das der hypergeometrischen Reihe.

Die Landensche Substitution mit *abnehmendem* Modul ergibt[18])

$$F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dq}{\sqrt{e^2\sin^2 q + \cos^2 q}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{M(1, e)},$$

also

$$F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) = \frac{\frac{\pi}{4}e'^2}{M(1, e)}\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1k_2}{4} + \frac{k_1k_2k_3}{8} + \cdots\right).$$

Nun ist

$$a_0 = 1, \qquad b_0 = e = 0{,}081696\,831\,215\,2_{55}^{62},$$

$$a_1 = \frac{1+e}{2} = 0{,}540\,848\,415\,607\,6_{27}^{31}, \qquad b_1 = \sqrt{e} = 0{,}285\,826\,575\,418\,1_2^5,$$

$$a_2 = 0{,}413\,337\,495\,512_{87}^{90}, \qquad b_2 = 0{,}393\,177\,886\,526_{49}^{54},$$

$$a_3 = 0{,}403\,257\,691\,019_{88}^{72}, \qquad b_3 = 0{,}403\,131\,694\,248_{79}^{84},$$

[17]) H. Dölp-E. Netto, Differential- und Integralrechnung, 19. Auflage, Berlin 1940, S. 164.

[18]) Vgl. O. Schlömilch, a. a. O. [14]), S. 308.

$$a_4 = 0{,}40319469263\,42^{8}_{3}, \quad b_4 = 0{,}40319468771\,2^{60}_{53},$$
$$a_5 = 0{,}40319469017\,3^{44}_{38}, \quad b_5 = 0{,}40319469017\,3^{45}_{37},$$
$$M(1, e) = 0{,}40319469017\,3^{44}_{37},$$
$$\frac{k_1}{2} = 0{,}42447344869\,86^{8}_{7},$$
$$k_2 = 0{,}30849105507\,96^{8}_{1},$$
$$\frac{k_3}{4} = \left[\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{b_1}}{2(\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1})}\right]^2 = 0{,}00624898465\,52^{61}_{54},$$
$$k_4 = \left(\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{b_2}}{\sqrt{a_2} + \sqrt{b_2}}\right)^2 = 0{,}00015624805\,235^{5}_{3},$$
$$\frac{k_5}{4} = \left[\frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{b_3}}{2(\sqrt{a_3} + \sqrt{b_3})}\right]^2 = 0{,}00000000152\,5840\,88^{9}_{4}.$$

Der Summand $\frac{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{32}$ ist der letzte und verschwindet gegen

$$1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{4} + \frac{k_1 k_2 k_3}{8} + \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{16}.$$

Daher folgt

$$1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{4} + \frac{k_1 k_2 k_3}{8} + \cdots = 1{,}49076492\,48294^{6}_{1},$$

Da nun

$$\frac{\pi}{4} e'^2 = 0{,}78015612\,37056\,9^{12}_{23},$$

ist

$$\frac{\pi}{4} e'^2 \left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{4} + \frac{k_1 k_2 k_3}{8} + \cdots\right) = 1{,}16302938\,51113^{7}_{2},$$
$$F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) = 2{,}88453546\,9976^{8}_{1}.$$

Das Ergebnis der Landenschen Substitution mit abnehmendem Modul ist genauer als das der Substitution mit zunehmendem Modul.

Die Bildlänge der nördlichen Hälfte des Meridians mit der geographischen Länge $\frac{\pi}{2}$ ist nach Gleichung (85)

$$m_0 a \{ - E(q_0, e') + F(q_0, e') + \operatorname{tg} q_0 \sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q_0} \}.$$

Wird

$$\operatorname{tg}(q_1 - q_0) = \frac{b_0}{a_0} \operatorname{tg} q_0$$
$$\operatorname{tg}(q_2 - q_1) = \frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg} q_1 \ldots$$

gesetzt, so ergibt die Landensche Substitution[18])

---

[18]) Vgl. O. Schlömilch, a. a. O. [14]) S. 307 und S. 315, Gleichung 31.

$$F(q_0, e') - E(q_0, e')$$

$$= \frac{e'^2 q_5}{64\,M(1,e)}\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{4} + \frac{k_1 k_2 k}{8} + \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{16} + \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{32}\right)$$

$$- e'\left(\frac{\sqrt{k_1}}{2}\sin q_1 + \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{4}\sin q_2 + \frac{\sqrt{k_1 k_2 k_3}}{8}\sin q_3 + \frac{\sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4}}{16}\sin q_4 + \frac{\sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}}{32}\sin q_5\right)$$

mit

$$\sin q_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 q_1}},\ \operatorname{ctg} q_1 = \frac{a_0 \operatorname{ctg} q_0 - {}^{\prime}2\, q_0}{a_0 + b_0}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} q_1 &= -1{,}342548286\,3^{8}_{6}, && q_1 \text{ im 2. Quadranten},\\
\operatorname{ctg} q_2 &= -0{,}620820243^{94}_{88}, && q_2 \text{ im 4. Quadranten},\\
\operatorname{ctg} q_3 &= \ \ 0{,}467085\,61^{22}_{18}, && q_3 \text{ im 7. Quadranten},\\
\operatorname{ctg} q_4 &= -0{,}836721015^{5}_{0}, && q_4 \text{ im 14. Quadranten},\\
\operatorname{ctg} q_5 &= \ \ 0{,}179210\,23^{11}_{02}, && q_5 \text{ im 27. Quadranten}.
\end{aligned}$$

Hieraus wird q_5 mit der Reihe (75) berechnet, deren konstanter Summand durch $27\frac{\pi}{2}$ ersetzt werden muß, und die nach der 11. Potenz abgebrochen wird:

$$q_5 = 42{,}234172\,97^{5}_{3}.$$

Ferner ist

$$\sin q_1 = 0{,}597354522\,4^{8}_{6},\ \sin q_2 = -0{,}849590\,450^{60}_{55},\ \sin q_3 = -0{,}906037\,62^{70}_{66},$$

$$\sin q_4 = 0{,}766941\,96^{82}_{78},\quad \sin q_5 = -0{,}984318\,573^{9}_{5},\quad \frac{e'^2}{64} = 0{,}015520\,7129338\,966^{8}_{4},$$

$$\frac{e'^2}{64}\left(1 + \frac{k_1}{2} + \cdots\right) = 0{,}023137\,734\,450^{2001}_{1992},$$

$$\frac{e'^2}{64\,M(1,e)}\left(1 + \frac{k_1}{2} + \cdots\right) = 0{,}057386\,009\,8213^{4}_{2},$$

$$F(q_0, e') - E(q_0, e') = 2{,}266\,790\,818^{3}_{0},$$

$$F(q_0, e') - E(q_0, e') + \operatorname{tg} q_0 \sqrt{1 - e'^2 \sin^2 q_0} = 4{,}072\,292\,99^{93}_{89}.$$

11. *Spezialisierung auf die Kugel.* Durch die Spezialisierung

$e = 0,$	$e' = 1,$
$F(B, e) = B,$	$F(B, e') = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \sin B,$
$E(B, e) = B,$	$E(B, e') = \sin B,$
$F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = \frac{\pi}{2},$	$F\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) = \infty,$
$E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = \frac{\pi}{2},$	$E\left(\frac{\pi}{2}, e'\right) = 1,$
$sn\,u = \sin u,$	$sn'\,v = \mathfrak{Tg}\,v,$
$cn\,u = \cos u,$	$cn'\,v = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,v},$
$dn\,u = 1,$	$dn'\,v = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,v},$
$E(am\,u, e) = u,$	$E(am\,v, e') = \mathfrak{Tg}\,v,$
$p = am(u, e) = u,$	$q = am(v, e') = \operatorname{arc}\sin \mathfrak{Tg}\,v,$

$$\psi = \frac{1}{\cos B_{\max}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 B_{\max} \sin^2 \varphi}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = t,$$

$$\psi = \cos B_{\max} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2 \cos^2 B_{\max}} = \frac{\pi}{2}$$

gehen die einzelnen Größen des Rotationsellipsoids in die entsprechenden der Kugel über. Die Parameterdarstellung des Äquatorbildes zwischen den geographischen Längen $(1 \pm e)\frac{\pi}{2}$ ergibt

$$x = m_0 A \left\{ \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\beta\, \mathfrak{Tg}\, \beta} - \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\beta}{2} \sqrt{\frac{\mathfrak{Tg}\, \beta}{\beta} (1 - \beta\, \mathfrak{Tg}\, \beta)} \right\}, \quad y = \infty,$$

worin der Parameter β von 0 bis zur Wurzel der Gleichung $\beta\, \mathfrak{Tg}\, \beta = 1$, also nach Gleichung (89) bis K_1 wächst und die Funktion arc sin von 0 aus zu- oder von π aus abnimmt. Es ist

$$(x)_{\beta = K_1} = m_0 A \left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Eingegangen 9. Juni 1941.

Über Kontinua mit unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen.

Von *Otto Haupt* in Erlangen.

1. Fragestellung und Ergebnisse.

1. 1. In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) bezeichnet Herr K. Wagner, unter Bezugnahme auf Begriffsbildungen von Herrn W. Dörge[2]), eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ in der euklidischen Ebene als „differenzierbar"[3]) in einem ihrer Punkte P, wenn sich $(\mathfrak{M}\mathfrak{U}-(P))$ für eine hinreichend kleine Umgebung $\mathfrak{U}$ von P durch paarweise fremde, offene Sektoren mit dem gemeinsamen Scheitel P überdecken läßt, deren Öffnungswinkel sämtlich beliebig klein sind (vgl. Nr. 2. 2). Der wesentliche Inhalt der Arbeit von Herrn Wagner besteht in dem Nachweis, daß jedes, in jedem seiner Punkte „differenzierbare" Kontinuum[4]) in jedem seiner Punkte zusammenhängend im Kleinen ist, also, wenn beschränkt, eine stetige Kurve.

Die vorliegende Note bezweckt, einerseits dies Ergebnis durch Abschwächung der „Differenzierbarkeitsforderung" (vgl. Nr. 1. 3) zu verallgemeinern, andererseits die Struktur der in Betracht kommenden Kontinua[4]) weitergehend aufzuklären. Dabei beschränken wir uns *der Einfachheit wegen* zunächst auf die *euklidische Ebene* (vgl. aber Nr. 1. 7). Des Näheren handelt es sich um Folgendes.

1. 2. Der Dörge-Wagnersche Differenzierbarkeitsbegriff besagt: Diejenigen von P ausgehenden Halbgeraden, welche mit $\mathfrak{M}\mathfrak{U}$ nur den Punkt P gemeinsam haben, also die „lokalen Nicht-Halbsekanten" von $\mathfrak{M}$ aus P, liegen bei hinreichend kleinem $\mathfrak{U}$ beliebig dicht in der Menge aller von P ausgehenden Halbgeraden. Der Begriff bezieht sich, wie wir also sagen können, auf die lokalen Halbsekantenmengen von $\mathfrak{M}$ in P; wir werden ihn daher im folgenden als starke Unvollständigkeit der lokalen Halbsekantenmengen bezeichnen, kurz: st. Sek. Unv.

Mit dieser Bezeichnung wird zum Ausdruck gebracht, daß der Dörge-Wagnersche Differenzierbarkeitsbegriff sich nicht oder wenigstens zunächst nicht auf die Halb*tangenten*menge, das Kontingent, von $\mathfrak{M}$ in P (vgl. Nr. 2. 3) bezieht. Angesichts dessen erscheint es nicht überraschend, daß bei st. Sek. Unv. die Halbtangentenmenge in P

---

[1]) K. Wagner, Charakterisierung stetiger Kurven mit Hilfe eines allgemeinen Richtungsbegriffes für Punktmengen, Math. Ann. 117 (1941), 672—686.

[2]) Wagner, a. a. O.[1]), S. 677.

[3]) Wagner, a. a. O.[1]), S. 674.

[4]) Unter einem Kontinum wird *von uns* oben im Text stets eine mehrpunktige, beschränkte, abgeschlossene, zusammenhängende Punktmenge verstanden. Herr Wagner bezeichnet (a. a. O.[1]), S. 672) als Kontinuum jede abgeschlossene, zusammenhängende Menge.

sogar „vollständig" sein, d. h. *alle* von P ausgehenden Halbgeraden enthalten kann; und zwar sogar dann, wenn die betrachtete Menge $\mathfrak{M}$ ein Kontinuum mit überall[5]) st. Sek. Unv. ist[6]). Ein derartiges Verhalten von $\mathfrak{M}$ in P stellt aber im gewissen Sinne das genaue Gegenteil von dem dar, was man üblicherweise als Differenzierbarkeit bezeichnet; denn diese besagt, etwa für den einfachsten Fall, nämlich für Bogen $y = f(x)$, daß im betrachteten Punkt an die gegebene Menge genau eine Tangente existiert (vgl. Nr. 3. 6). Indessen läßt sich, wie wir zeigen werden, die st. Sek. Unv. in Zusammenhang bringen mit der Differenzierbarkeit im eben erwähnten üblichen Sinne, weingstens in dem, hier allein zur Erörterung stehenden Falle eines Kontinuums; dabei kann man die Voraussetzung gegenüber der von Herrn Wagner gemachten noch abschwächen, insofern die st. Sek. Unv. nur für beinahe alle Punkte oder beinahe überall, d. h. überall bis auf eine abzählbare[7]) Menge von Ausnahmepunkten, vorhanden zu sein braucht. Es gilt nämlich (vgl. Nr. 3. 6) der

Erste Differenzierbarkeitssatz. *Ein ebenes Kontinuum, dessen lokale Halbsekantenmengen beinahe überall stark unvollständig sind, besitzt beinahe überall genau eine Tangente.*

Die im Satze zugelassenen abzählbaren Ausnahmemengen können auch unendlich sein (Nr. 2. 5. 3. 1).

1. 3. Wie sich im Verlauf unserer Untersuchung herausstellte, gestaltet sich der Beweis für den ersten Differenzierbarkeitssatz (Nr. 1. 2) einfach im Anschluß an die Behandlung der Frage nach der *Verteilung der Verzweigungs- und Endpunkte auf Kontinua $\mathfrak{K}$ mit beinahe überall st. Sek. Unv.*; Verzweigungspunkt und Endpunkt im Sinne der topologischen (dimensionstheoretischen) Kurventheorie verstanden (vgl. Nr. 3. 3). Auf diese Frage stößt man z. B. angesichts der Bemerkung, daß $\mathfrak{K}$ auch in solchen Punkten, in welchen $\mathfrak{K}$ genau eine Tangente besitzt, noch ein ziemlich kompliziertes Verhalten aufweisen, etwa Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung sein kann. Der Verteilungssatz, welchen man so für Kontinua mit beinahe überall st. Sek. Unv. erhält, gilt wie sich zeigt, allgemeiner für Kontinua mit beinahe überall schwach unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen, kürzer: schw. Sek. Unv.; dabei sprechen wir von schw. Sek. Unv., wenn die in Nr. 1. 1 genannten Überdeckungssektoren zwar nicht beliebig klein, aber wenigstens stets kleiner als π gewählt werden können (vgl. Nr. 2. 2). Es gilt nämlich (vgl. Nr. 3. 3. 1) der

Singularitätensatz. *Ein (ebenes) Kontinuum mit beinahe überall schwach unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen besitzt (nur) abzählbar viele End- und Verzweigungspunkte.*

Dieser Singularitätensatz gilt natürlich *insbesondere für Kontinua mit beinahe überall starker Sek. Unv.*

1. 4. Für Kontinua mit beinahe überall *schwacher* Sek. Unv. ist der für starke Sek. Unv. gültige erste Differenzierbarkeitssatz nicht mehr allgemein gültig. Dies zeigen (Nr. 2. 5. 3. 2) Beispiele, welche sich übrigens einem zweiten Differenzierbarkeitssatz einordnen lassen, der für Kontinua mit fast überall schwacher Tgt. Unv. gilt (vgl. Nr. 2. 4 und Nr. 3. 7).

1. 5. Wie schon angedeutet (Nr. 1. 1) läßt sich der von Herrn Wagner für den Fall st. Sek. Unv. bewiesene Satz verallgemeinern, nämlich dahin (vgl. Nr. 3. 4. 1):

Jedes (ebene) Kontinuum mit beinahe überall schwach unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen ist eine stetige Kurve.

---

[5]) „Überall" bedeutet: In jedem Punkte der jeweils betrachteten Punktmenge.

[6]) Wagner, a. a. O.[2]), S. 674, sowie die Bemerkung S. 676, Zeile 10 v. u. ff. Das Beispiel wird von uns oben im Text (Nr. 2. 5. 3. 1) verwendet.

[7]) „Abzählbar (viele)" bedeutet: Keine oder endlich viele oder abzählbar unendlich viele.

Dies ist nicht mehr richtig, wenn in überabzählbar vielen Punkten nicht schw. Sek. Unv. besteht (Beispiel: Sinusoid).

1. 6. Über den Satz in Nr. 1. 5 hinaus ergibt sich schließlich (Nr. 3. 5. 1) der

Satz. *Jedes ebene Kontinuum mit beinahe überall schwach unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen ist eine reguläre Kurve und zugleich erbliche Bogensumme.*

1. 7. *Die in* Nr. 1. 3, 1. 5 *und* 1. 6 *angegebenen Sätze* (Singularitätensatz, Satz von der Regularität und von der erblichen Bogensumme) gelten im wesentlichen unverändert für Kontinua im euklidischen R_n mit $n \geqq 3$, sobald man den Begriff der schwachen Unvollständigkeit der lokalen Halbsekantenmengen für $n \geqq 3$ geeignet erklärt. Eine solche Erklärung der schw. Sek. Unv. ist beispielsweise diese: Für eine hinreichend kleine Kugelumgebung $\mathfrak{U}$ des Punktes P von $\mathfrak{R}$ soll $\mathfrak{U}\mathfrak{R}$ überdeckbar sein mit endlich vielen, P-offenen (vgl. Nr. 2. 1), untereinander P-fremden Sektoren, deren jeder s-fremd ist zu $\mathfrak{R}$, und enthalten in einem konvexen Eckraum[3]); unter einem Sektor ist dabei zu verstehen der Durchschnitt der (n-dimensionalen) Kugel $\mathfrak{U}$ vom Mittelpunkt P mit dem P-offenen Kegel $\mathfrak{s}$ (wobei $\mathfrak{s}$ Summe von Halbgeraden mit P als Anfangspunkt ist). Auf entsprechende Verallgemeinerung der Differenzierbarkeitssätze (Nr. 1. 2; 1. 4) sei hingewiesen.

Eine weitere Verallgemeinerungsmöglichkeit besteht darin, daß man die Sektoren ersetzt durch geeignete, P-offene, zusammenhängende Punktmengen, welche P mit der Begrenzung von $\mathfrak{U}$ verbinden.

Auf alle diese Verallgemeinerungen wird hier nicht weiter eingegangen.

2. Definition und Eigenschaften der betrachteten Unvollständigkeitsbegriffe.

2. 1. Unter einem Sektor, genauer: unter einem P-offenen Sektor bzw. einem abgeschlossenen Sektor mit P als Zentrum verstehe man jede Menge von Punkten (r, φ) mit $0 \leqq r < a$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ bzw. mit $0 \leqq r \leqq a$, $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$, wo r, φ Polarkoordinaten mit P als Nullpunkt ($r = 0$) sind und $0 < a$, $0 < \varphi_2 - \varphi_1$. Durch $\varphi_2 - \varphi_1$ werde die Größe oder der (Öffnungs-)Winkel des Sektors gemessen; insbesondere heißt also der Seklor *kleiner als* π, wenn $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi$. Weiter werden bezeichnet: a als Radius, ferner $r = a$, $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$ als (Kreis-)Bogen, weiter $0 \leqq r \leqq a$, $\varphi = \varphi_1$ bzw. $\varphi = \varphi_2$ als Schenkel *des Sektors* und schließlich $0 \leqq r < a$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$ als die *zum Sektor gehörige* (*offene*) Kreisscheibe. Zwei (konzentrische) Sektoren heißen P-fremd, wenn ihr Durchschnitt nur das gemeinsame Zentrum P enthält. Ein (P-offener oder abgeschlossener) Sektor $\mathfrak{s}$ heiße s-fremd *zur Menge* $\mathfrak{M}$, wenn $\mathfrak{M}$ keine Schenkelpunkte von $\mathfrak{s}$ enthält, ausgenommen P. Die Bezeichnungen P-offen, s-fremd usw. übertragen sich auf Winkelräume, d. h. auf Punktmengen $0 \leqq r$, $\varphi_{1(-)}^{<} \varphi_{(-)}^{<} \varphi_2$.

2. 2. Wir sagen, es besitze $\mathfrak{M}$ in P schwach unvollständige lokale Halbsekantenmengen (schw. Sek. Unv.), wenn es eine offene Kreischeibe $\mathfrak{U}$ mit P als Zentrum gibt derart, daß $\mathfrak{M}\mathfrak{U}$ sich überdecken läßt mit P-offenen Sektoren, deren jeder $\mathfrak{U}$ als zugehörige Kreisscheibe besitzt, kleiner als π ist und P-fremd zu allen übrigen (also s-fremd zu $\mathfrak{M}\mathfrak{U}$).

Die *Anzahl dieser überdeckenden Sektoren kann* übrigens *stets als endlich*, sogar kleiner als fünf angenommen werden. In der Tat: Es hei $\mathfrak{h}_0$ eine von P ausgehende Halbgerade, welche fremd ist zu $\mathfrak{U}' = (\mathfrak{M}\mathfrak{U} - (P))$; eine solche existiert bei schw. Sek. Unv. stets. Weiter sei $\mathfrak{w}^+$ bzw. $\mathfrak{w}^-$ derjenige P-offene Winkelraum, welcher vermöge Drehung von $\mathfrak{h}_0$ bei festem P um den Winkel $+\pi$ bzw. $-\pi$ erzeugt wird. Ist die zu $\mathfrak{h}_0$ komplementäre Halbgerade $\mathfrak{h}_0'$ fremd zu $\mathfrak{U}'$, so enthält sowohl $\mathfrak{w}^+$ als $\mathfrak{w}^-$ weitere derartige Halbgerade und die Überdeckung wird durch vier Sektoren geleistet; andernfalls ist $\mathfrak{h}_0'$

[3]) Vgl. Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung, Berlin 1938, I. Bd., S. 150.

enthalten in einem offenen Winkelraum kleiner als π, dessen begrenzende Halbgerade fremd zu $\mathfrak{U}'$ und in $\mathfrak{w}^+$ bzw. $\mathfrak{w}^-$ enthalten sind, so daß zur Überdeckung drei Sektoren genügen. Und zwar liefern diese endlich vielen (drei bzw. vier) Sektoren eine Überdeckung der oben erklärten Art.

Die **starke** *Unvollständigkeit* der lokalen Halbsekantenmengen (st. Sek. Unv.) ist derjenige Spezialfall der schw. Sek. Unv., bei welchem für hinreichend kleine $\mathfrak{U}$ die Überdeckung durch Sektoren geleistet werden kann, deren Öffnungswinkel sämtlich beliebig klein sind.

2.3. Unter einer **Halbtangente** $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(P; \mathfrak{M})$ an eine (ebene) Punktmenge $\mathfrak{M}$ in einem ihrer Häufungspunkte P verstehen wir jeden Limes einer Folge von Halbgeraden $\mathfrak{h}_\nu$, wobei jede $\mathfrak{h}_\nu$ den Anfangspunkt P besitzt und einen von P verschiedenen, mit $\nu \to \infty$ gegen P konvergierenden $P_\nu \varepsilon \mathfrak{M}$ enthält. Die Menge aller $\mathfrak{h}(P;\mathfrak{M})$ bei festem P (und $\mathfrak{M}$) wird als **Halbtangentenmenge** oder als **Kontingent** $C(P; \mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ in P bezeichnet. Es ist $C(P; \mathfrak{M})$ *abgeschlossen* (im Raum aller von P ausgehenden Halbgeraden).

2.4. Wir sprechen von **schwach unvollständiger Halbtangentenmenge** in P, abgekürzt: **schw. Tgt. Unv.**, wenn $C(P; \mathfrak{M})$ sich überdecken läßt mit P-offenen Winkelräumen, die sämtlich kleiner sind als π, ferner P-fremd untereinander (also s-fremd zu $C(P; \mathfrak{M})$).

Anmerkung. Wegen der Abgeschlossenheit von $C(P; \mathfrak{M})$ würde sich übrigens der Begriff der schw. Tgt. Unv. nicht ändern, wenn in der Definition auch *P-offene* überdeckende Winkelräume zugelassen würden, welche *gleich* π sind.

2.5. *Vergleich der verschiedenen Unvollständigkeitsbegriffe.*

2.5.1. *Die schw. Tgt. Unv. ist Spezialfall der schw. Sek. Unv.* Denn im Falle schw. Tgt. Unv. können außerhalb der das Kontingent überdeckenden Sektoren (kleiner als π) nicht in beliebiger Nähe des betrachteten Punktes P Punkte von $\mathfrak{M}$ liegen, weil aus der Existenz solcher Punkte die Existenz einer nicht im Innern einer der Sektoren gelegenen Halbtangente an $\mathfrak{M}$ in P folgen würde.

Anmerkung. Die schw. Tgt. Unv. und die schw. Sek. Unv. unterscheiden sich so: Eine hinreichend kleine Umgebung von P auf $\mathfrak{M}$ ist überdeckbar mit P-offenen Sektoren kleiner als π (und s-fremd zu $\mathfrak{M}$), wobei im Falle schw. Tgt. Unv. die abgeschlossenen Hüllen, im Falle schw. Sek. Unv. nur die offenen Kerne der Sektoren als P-fremd angenommen werden können. Daher gibt es bei schw. Tgt. Unv. stets Sektoren (größer als Null), welche P-fremd sind zum Kontingent, während solche Sektoren nicht einmal bei starker Sek. Unv. vorhanden zu sein brauchen (vgl. dazu das Beispiel in Nr. **2.5.3.1**).

2.5.2. *Es gibt Kontinua mit überall schw. Sek. Unv., welche nicht beinahe überall schw. Tgt. Unv. besitzen und auch nicht beinahe überall st. Sek. Unv.*

Zum Beweis konstruieren wir einen *einfachen Bogen* $\mathfrak{B}$ *mit überall schw. Sek. Unv.* (also[9]) ein Kontinuum ohne Verzweigungspunkte (vgl. Nr. **3.3**) und mit genau zwei Endpunkten), *dessen Kontingent in überabzählbar vielen Punkten einen Winkelraum der Größe* π *genau ausfüllt und welcher in diesen Punkten auch nicht st. Sek. Unv. besitzt.* Ein solcher Bogen besitzt also *in überabzählbar vielen Punkten* insbesondere ein *zusammenhängendes Kontingent.*

Konstruktion von $\mathfrak{B}$. Es sei $\mathfrak{P}$ in $[0,1] = (0 \leqq x \leqq 1)$ die Cantorsche triadische Menge. Diejenigen (offenen) Intervalle der Länge $3^{-\nu}$, welche Komponenten des Komplementes von $\mathfrak{P}$ sind, seien als die „ν-ten Lückenintervalle" L_ν bezeichnet,

[9]) K. Menger, Kurventheorie, Leipzig, 1932, S. 267.

$\nu = 1, 2, \ldots$ Über jedem L_ν als Basis werde ein, in der Halbebene $y \geqq 0$ gelegenes gleichschenkliges Dreieck D_ν mit der Höhe $h_\nu = 2\nu^{-1}$ errichtet. Die Summe der, nicht in die x-Achse fallenden Seiten aller (zu ν gehörigen) D_ν sei mit $\mathfrak{S}_\nu$ bezeichnet. Dann wird durch die abgeschlossene Hülle von $\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{S}_\nu$ ein Bogen $\mathfrak{B}$ der gewünschten Beschaffenheit geliefert.

Beweis. 1. Jedenfalls ist $\mathfrak{B}$ darstellbar in $[0,1]$ durch eine eindeutige stetige Funktion $y = f(x) \geqq 0$, ist also ein einfacher Bogen.

2. Ferner ist $\mathfrak{B}$ für jedes x im Innern eines L_ν von (sogar) st. Sek. Unv. Und in den auf der x-Achse gelegenen Punkten Q von $\mathfrak{B}$ ist wegen $f(x) \geqq 0$ jede Umgebung von Q auf $\mathfrak{B}$ überdeckbar mit zwei offenen Sektoren, die beliebig wenig größer sind als $2^{-1}\pi$ und deren gemeinsamer Schenkel dem, in $y \geqq 0$ gelegenen Lot im Punkte Q auf die x-Achse angehört. Somit besitzt $\mathfrak{B}$ überall schw. Sek. Unv.

3. Jetzt betrachte man einen der überabzählbar vielen Punkte P von $\mathfrak{B}$, die in der x-Achse liegen und irrationale x-Koordinate besitzen. Wir bezeichnen noch die nach Wegnahme *aller* L_ν mit $\nu = 1, \ldots, n$; $n \geqq 1$, aus $[0,1]$ übrigbleibenden Intervalle (der Länge 3^{-n}) als „n-te Restintervalle" R_n. Dann liegt also P für jedes n im *Innern* genau eines $R_n = R_n(P)$; und $R_n(P)$ hat mit genau einem $L_n = L_n(P)$ einen Endpunkt gemeinsam, $n = 1, 2, \ldots$ Da P im Innern aller $R_n(P)$ liegt, gibt es je unendlich viele n, für welche $L_n(P)$ rechts bzw. links an $R_n(P)$ angrenzt. Da $R_n(P)$ und $L_n(P)$ beide die Länge 3^{-n} besitzen, so bilden die von P ausgehende, nach der Spitze des über $L_n(P)$ stehenden Dreiecks $D_n = D_n(P)$ gezogene Halbgerade und die x-Achse einen Winkel α mit $0 < \alpha < 2^{-1}\pi$, für welchen

$$\operatorname{tg} \alpha > 2 \cdot n^{-1} : 2 \cdot 3^{-n} = n^{-1} 3^n = q_n.$$

Da $q_n \to \infty$ mit $n \to \infty$, so gibt es von P ausgehende Halbgeraden, welche mit der, von P ausgehenden positiven bzw. negativen x-Halbachse Winkel bilden, die beliebig wenig unterhalb $2^{-1}\pi$ liegen, und welche von P verschiedene Punkte aus einer beliebig kleinen Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ enthalten. Außerdem enthält die positive sowohl als die negative, von P ausgehende x-Halbachse Punkte von $\mathfrak{B}$, welche beliebig benachbart sind zu P. Daher schließen die vorderen oberen und unteren Halbtangenten in P an $\mathfrak{B}$ einen Winkel der Größe $2^{-1}\pi$ ein; und ebenso die hinteren oberen und unteren Halbtangenten. Somit[10]) wird vom Kontingent in P an $\mathfrak{B}$ ein Winkel genau der Größe π überdeckt; und von den lokalen Halbsekanten werden zwei Sektoren überdeckt, die beliebig wenig kleiner als $2^{-1}\pi$ gewählt werden können, w. z. z. w.

2. 5. 3. *Die schw. Tgt. Unv. und die st. Sek. Unv. überschneiden sich*; d. h. es gibt erstens *Kontinua mit überall st. Sek. Unv., deren Kontingent in abzählbar unendlich vielen Ausnahmepunkten vollständig ist*, also dort insbesondere nicht von schw. Tgt. Unv. (überabzählbar viele derartige Ausnahmepunkte kann es nach dem ersten Differenzierbarkeitssatz (Nr. 1. 2) nicht geben); zweitens *Kontinua mit überall schw. Tgt. Unv., welche in überabzählbar vielen Punkten nicht von st. Sek. Unv. sind.*

2. 5. 3. 1. Zu Erstens. Beispiel: Es sei[6]) $\mathfrak{K}(P; a)$, bei festem $a > 0$, die Menge aller Punkte (r, φ), wo r, φ Polarkoordinaten bezüglich P, mit $\varphi = 2\pi k m^{-1}$, $0 \leqq r \leqq a m^{-1}$ und allen ganzen, positiven, teilerfremden m, k, für welche $k < m$ und $m, k = 1, 2, \ldots$ Setzt man $P_\nu = (x = \nu^{-1}, y = 0)$, $a_\nu = (\nu + 1)^{-3}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, so leistet $\mathfrak{K} = [0,1] + \sum_\nu \mathfrak{K}(P_\nu; a_\nu)$ das Gewünschte. Man könnte übrigens $\mathfrak{K}$ durch Hinzufügen eines anderen Kontinuums so abändern, daß die st. Sek. Unv. nur beinahe überall erfüllt ist.

---

[10]) Vgl. Haupt-Aumann, a. a. O.[6]), II. Bd., S. 87, Satz.

2. 5. 3. 2. Zu Zweitens. Beispiel: Der einfache Bogen $\mathfrak{B}$ sei kartesisches Bild einer eindeutigen, stetigen, streng monotonen Funktion $y = S(x)$, $0 \leqq x \leqq 1$, welche in keinem Punkte einer nicht-abzählbaren Lebesgueschen Nullmenge $\mathfrak{N}$ entweder vorn oder hinten differenzierbar ist (d. h. welche für jedes $x \varepsilon \mathfrak{N}$ weder eine endliche noch eine unendliche entweder vordere oder hintere Ableitung besitzt[11]). Einerseits nämlich kann nicht beinahe überall auf $\mathfrak{B}$ st. Sek. Unv. vorhanden sein, weil für $\mathfrak{B}$ der erste Differenzierbarkeitssatz (Nr. 1. 2) nicht gilt. Andererseits ist überall auf $\mathfrak{B}$ schw. Tgt. Unv. vorhanden; denn wegen der Monotonie von $S(x)$ ist das Kontingent $C(x; \mathfrak{B})$ für jedes x aus $[0, 1]$ überdeckbar mit zwei abgeschlossenen Sektoren der Öffnung $2^{-1}\pi$.

Zusatz. Die schw. *Tgt.* Unv. erscheint nach dem eben Dargelegten als weniger scharfe Forderung gegenüber der st. *Sek.* Univ., insofern nämlich bei ihr möglicherweise in einer nicht-abzählbaren Menge keine Tangente vorhanden ist; gleichzeitig gestattet die schw. Tgt. Unv. eine etwas schärfere Aussage als die st. Sek. Unv., insofern nämlich durch sie die Vollständigkeit des Kontingents ausgeschlossen wird.

3. Beweise[12]).

3. 1. Um uns im folgenden kürzer fassen zu können, schicken wir nachstehende naheliegende Hilfsbemerkung voraus, die wir der Vollständigkeit wegen auch beweisen:

Es sei $\mathfrak{C}$ ein beliebiges (ebenes) Kontinuum (also nicht notwendig mit schw. Sek. Unv.). Ferner sei $\mathfrak{s}$ eine zusammenhängende, mehrpunktige Menge, in welcher P enthalten und für welche $(\mathfrak{s} - (P))$ offen ist. Für eine (hinreichend kleine) Umgebung $\mathfrak{U}_0$ von P soll kein innerhalb $\mathfrak{U}_0$ gelegener Begrenzungspunkt von $\mathfrak{s}$ zu $(\mathfrak{C} - (P))$ gehören. Ist dann P Häufungspunkt von $\mathfrak{s}\mathfrak{C}$, so enthält $\mathfrak{s}\mathfrak{C}$ eine mehrpunktige Komponente, in welcher P enthalten ist; und folglich enthält die Begrenzung $\mathfrak{B}$ einer jeden hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}$ von P Punkte aus $\mathfrak{s}\mathfrak{C}$. O. B. d. A. kann und soll ferner angenommen werden, daß Punkte von $\mathfrak{s}\mathfrak{C}$ außerhalb $\mathfrak{U}_0$ liegen.

Beweis. Es sei $\{P_\nu\}$ eine Folge von Punkten aus $\mathfrak{s}\mathfrak{C}$, welche gegen P konvergiert $(P_\nu \neq P)$. Nach dem Randsatz von Janiszewski[13]) hat dann die, P_ν enthaltende Komponente $\mathfrak{C}_\nu$ von $(\mathfrak{U}_0\mathfrak{s} - (P))\mathfrak{C}$ entweder P oder Punkte von $\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}\mathfrak{s}$ als Häufungspunkte, wobei $\mathfrak{B}_0$ die Begrenzung von $\mathfrak{U}_0$ sein soll; dabei ist P_ν als innerhalb $\mathfrak{U}_0$ gelegen angenommen, was für schließlich alle ν zutrifft. Gibt es nun ein $\nu = n$ so, daß P Häufungspunkt von $\mathfrak{C}_n$ ist, dann liefert $\mathfrak{C}_n$ eine, P enthaltende Komponente von $\mathfrak{C}\mathfrak{s}$ und es hat die Begrenzung jeder hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}$ von P Punkte mit $\mathfrak{C}_n$ gemeinsam[14]). Gibt es aber kein solches $\mathfrak{C}_n$, so läßt sich aus der Folge der Kontinua[15]) $\overline{\mathfrak{C}}_\nu$ eine kon-

---

[11]) Eine überaus einfache Konstruktion solcher $S(x)$ findet sich bei G. Faber, Über stetige Funktionen. II., Math. Ann. 69 (1910), S. 399. Für diese $S(x)$ von Herrn Faber ist die Nullmenge N sogar in *jedem* Teilintervall des Definitionsbereiches von $S(x)$ von der Mächtigkeit des Kontinuums (a. a. O., S. 400) und die Ableitung von $S(x)$, soweit sie existiert, nimmt nur die Werte 0 und $+\infty$ an (a. a. O., S. 397). Von Herrn Faber wird ausdrücklich nur hervorgehoben, daß in den Punkten von N weder eine endliche noch unendliche Ableitung existiert. Daraus folgt aber die nicht-gleichzeitige Existenz der (endlichen oder unendlichen) vorderen *und* hinteren Ableitung in einer, in jedem Teilintervall überabzählbaren Teilmenge von N. Die gleichzeitige Existenz der vorderen und hinteren Ableitung in einem Punkte, in welchem die Ableitung nicht existiert, hätte nämlich zur Folge, daß der betr. Punkt eine Ecke auf dem Bogen wäre; die Ecken sind aber abzählbar (vgl. Fußnote [12]).

[12]) Zur Erleichterung der Lektüre werden die Definitionen der benötigten Begriffe aus der topologischen Theorie im Texte sämtlich angegeben.

[13]) Vgl. F. Hausdorff, Mengenlehre, 3. Aufl., Berlin 1935, S. 161, XVII.

[14]) Vgl. Hausdorff, a. a. O.[13]), S. 153, VII.

[15]) Mit $\overline{\mathfrak{M}}$ wird die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{M}$ bezeichnet.

vergente Teilfolge auswählen[16]), deren Limes $\mathfrak{C}_0$ wieder ein Teilkontinuum von $\mathfrak{C}$ ist[16]). Es enthält dann $\mathfrak{C}_0$ sowohl P als Punkte von $\mathfrak{B}_0\bar{\mathfrak{s}}$ und ist selbst enthalten in $\bar{\mathfrak{U}}_0\bar{\mathfrak{s}}$. Und da $(\mathfrak{C}_0 - (P))$ fremd ist zur Begrenzung von $\mathfrak{s}$ innerhalb $\mathfrak{U}_0$, so besitzt auch $\mathfrak{s}\mathfrak{C}$ eine Komponente, in welcher P enthalten ist[13]). Die Begrenzung jeder hinreichend kleinen Umgebung von P ist daher[14]) nicht fremd zu $\mathfrak{s}\mathfrak{C}$, w. z. z. w.

Anmerkung. Mengen $\mathfrak{s}$ der oben betrachteten Art sind insbesondere die P-offenen, zu $\mathfrak{C}$ s-fremden Sektoren mit P als Zentrum (Nr. 2. 1).

3. 2. Unter einer **Ecke** Q der ebenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ verstehe man einen Punkt $Q \varepsilon \mathfrak{M}$, dessen hinreichend kleine Umgebung auf $\mathfrak{M}$ überdeckbar ist mit einem einzigen Sektor kleiner als π, welcher Q als Zentrum besitzt. Ferner heiße $Z \varepsilon \mathfrak{M}$ **lokaler Zerlegungspunkt** von $\mathfrak{M}$, wenn eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von Z auf $\mathfrak{M}$ existiert derart, daß $\bar{\mathfrak{U}}$ von Z zerlegt wird, d. h. daß in der, Z enthaltenden Komponente von $\bar{\mathfrak{U}}$ zwei Punkte existieren, welche je einer von zwei fremden Teilmengen von $(\bar{\mathfrak{U}} - (Z))$ angehören, von denen keine einen Häufungspunkt der anderen enthält und deren Summe gleich $(\bar{\mathfrak{U}} - (Z))$ ist[17]).

Satz. *Voraussetzung. Es sei $\mathfrak{C}$ ein (ebenes) Kontinuum und P ein Punkt von $\mathfrak{C}$, in welchem $\mathfrak{C}$ schw. Sek. Unv. besitzt.*

Behauptung. Ist P keine Ecke, so ist P lokaler Zerlegungspunkt von $\mathfrak{C}$.

Beweis. Es seien $\mathfrak{s}_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, endlich viele (vgl. Nr. 2. 2), eine Umgebung von P auf $\mathfrak{C}$ überdeckende, P-offene, untereinander P-fremde Sektoren, welche kleiner als π und s-fremd zu $\mathfrak{C}$ sind; ferner sei $\mathfrak{B}_0$ eine (gemäß Nr. 2. 1) zu den $\mathfrak{s}_\varkappa = \mathfrak{s}_\varkappa\mathfrak{B}_0$ gehörige offene Kreisscheibe. Wenn P keine Ecke ist, so müssen für *jede* hinreichend kleine Kreisscheibe $\mathfrak{B}$ mindestens zwei der $\mathfrak{s}_\varkappa\mathfrak{B}$ Punkte von $\mathfrak{C}$ enthalten, die von P verschieden sind. Daher gibt es zwei feste unter den $\mathfrak{s}_\varkappa$, etwa $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$, deren jeder eine gegen P konvergierende Folge von Punkten P_1, bzw. P_2, aus $\mathfrak{C}$ enthält ($P_1 \neq P$, $P_2 \neq P$). Gemäß Nr. 3. 1 besitzt daher sowohl $\mathfrak{s}_1\mathfrak{C}$ als $\mathfrak{s}_2\mathfrak{C}$ je eine, P enthaltende, mehrpunktige Komponente $\mathfrak{C}_1$ bzw. $\mathfrak{C}_2$. Folglich liegen in der, P enthaltenden Komponente $\mathfrak{C}_0$ von $\bar{\mathfrak{B}}_0\mathfrak{C}$ innere Punkte von $\mathfrak{s}_1$ sowohl als von $\mathfrak{s}_2$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{b}_\varkappa$ den abgeschlossenen Kreisbogen von $\mathfrak{s}_\varkappa$ (vgl. Nr. 2. 1), so sind andererseits die beiden Mengen $\mathfrak{s}_1' = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{s}_1 - (P)$ und $\mathfrak{s}_2' = \mathfrak{b}_2 + \cdots + \mathfrak{b}_\varkappa + \mathfrak{s}_2 + \cdots + \mathfrak{s}_\varkappa - (P)$ nicht leer, fremd zu einander und keine enthält einen Häufungspunkt der anderen. Wegen $\mathfrak{C}_0\bar{\mathfrak{B}}_0 - (P) = \mathfrak{C}_0\mathfrak{s}_1' + \mathfrak{C}_0\mathfrak{s}_2'$ ist daher P lokaler Zerlegungspunkt von $\mathfrak{C}$.

3. 2. 1. *Voraussetzung. Es sei $\mathfrak{K}$ ein (ebenes) Kontinuum mit beinahe überall schw. Sek. Unv.*

Behauptung. Die Menge aller Punkte von $\mathfrak{K}$, welche nicht lokale Zerlegungspunkte von $\mathfrak{K}$ sind, ist abzählbar.

Beweis. Die Menge aller Ecken von $\mathfrak{K}$ ist abzählbar[18]). Daraus und aus Nr. 3. 2 folgt die Behauptung, wenn man beachtet, daß nur in abzählbar vielen Punkten von $\mathfrak{K}$ nicht schw. Sek. Unv. herrscht

3. 3. Nunmehr gelangen wir zum Singularitätensatz. Wir benützen dabei die folgenden Bezeichnungen der topologischen Kurventheorie[19]). Es heißt E ein **Endpunkt** der Menge $\mathfrak{M}$, wenn es beliebige kleine Umgebungen von E gibt, für welche der Durchschnitt ihrer Begrenzung mit $\mathfrak{M}$ genau einpunktig ist, und wenn es keine beliebig

---

[16]) Vgl. Hausdorff, a. a. O.[13]), § 29, S. 164.
[17]) Vgl. Menger, a. a. O.[9]), S. 164 (auch S. 18 und 153).
[18]) Vgl. Haupt-Aumann, a. a. O.[8]), I. Bd., S. 151.
[19]) Menger, a. a. O.[9]), S. 98/99.

kleinen Umgebungen von E gibt, für welche dieser Durchschnitt leer ist. Ferner heißt ein Punkt V **Verzweigungspunkt** von $\mathfrak{M}$, wenn die Begrenzung *jeder* hinreichend kleinen Umgebung von V mindestens drei Punkte von $\mathfrak{M}$ enthält. Ein Punkt, für welchen die Begrenzung jeder beliebig kleinen Umgebung mindestens zwei und gewisser beliebig kleiner Umgebungen auch genau zwei Punkte von $\mathfrak{M}$ enthält, heißt **gewöhnlicher Punkt** von $\mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{M}$ speziell ein *Kontinuum*, so ist kein Punkt P von $\mathfrak{M}$ nulldimensional[19]) (d. h. zu keinem Punkt von $\mathfrak{M}$ gibt es beliebig kleine Umgebungen, deren Begrenzung fremd ist zu $\mathfrak{M}$). Daher[19]) ist *jeder Punkt eines Kontinuums entweder Endpunkt oder gewöhnlicher Punkt oder Verzweigungspunkt.*

Wir bemerken:

Ist in einem Kontinuum $\mathfrak{K}$ die Menge aller nicht lokal zerlegenden Punkte abzählbar, so sind beinahe alle Punkte von $\mathfrak{K}$ gewöhnliche Punkte.

Beweis. Da ein Endpunkt niemals lokaler Zerlegungspunkt ist[20]), so sind die Endpunkte von $\mathfrak{K}$ abzählbar. Ebenso sind nach Voraussetzung die nicht lokal zerlegenden Verzweigungspunkte abzählbar. Schließlich sind die lokal zerlegenden Verzweigungspunkte eines Kontinuums immer abzählbar.[21])

3. 3. 1. Aus Nr. 3. 2. 1 und Nr. 3. 3 folgt der

Singularitätensatz. *Beinahe alle Punkte eines (ebenen) Kontinuums mit beinahe überall schw. Sek. Unv. sind gewöhnliche Punkte.*

Zusatz. Jeder Endpunkt E eines solchen Kontinuums ist eine Ecke, falls in E schw. Sek. Unv. vorhanden ist.

3. 4. Ein Punkt P heißt **regulärer Punkt**[22]) der Menge $\mathfrak{M}$, wenn es beliebig kleine Umgebungen von P gibt, deren Begrenzungen nur *endlich* viele Punkte von $\mathfrak{M}$ enthalten. Die Menge aller irregulären (d. h. nicht regulären) Punkte einer abgeschlossenen Menge ist aber[23]) entweder leer oder sie enthält ein Kontinuum, also[14]) überabzählbar viele Punkte. Sind daher beinahe alle Punkte eines Kontinuums regulär, so sind sogar alle regulär, d. h. das Kontinuum ist eine reguläre Kurve. Da eine reguläre Kurve erblich zusammenhängend im Kleinen ist[24]), folgt also:

Ein Kontinuum $\mathfrak{C}$, dessen Punkte beinahe alle regulär sind, ist eine reguläre Kurve, insbesondere also eine stetige Kurve (nämlich [sogar erblich] zusammenhängend im Kleinen).

3. 4. 1. Da jeder gewöhnliche Punkt regulär ist, so folgt aus Nr. 3. 3. 1 und Nr 3. 4 insbesondere

Jedes (ebene) Kontinuum mit beinahe überall schw. Sek. Unv. ist eine stetige Kurve.

3. 5. Eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ wird als **Bogensumme** bezeichnet, wenn $\mathfrak{M}$ darstellbar ist als Vereinigung abzählbar vieler einfacher Bogen[25]). Und eine *stetige Kurve* $\mathfrak{C}$ heißt **erbliche Bogensumme**, wenn sowohl $\mathfrak{C}$ als alle Teilkontinua von $\mathfrak{C}$ Bogensummen

---

[19]) Menger, a. a. O.[9]), S. 164, Zeile 11 v. o.

[21]) Menger, a. a. O.[9]), S. 164. Auf den Satz von der Abzählbarkeit der lokal zerlegenden Verzweigungspunkte hat mich Herr Nöbeling gelegentlich einer Unterhaltung über die Wagnersche Arbeit zu Beginn meiner Untersuchung freundlicherweise aufmerksam gemacht.

[22]) Menger a. a. O.[9]), S. 96.

[23]) Menger, a. a. O.[9]), S. 127. Den Hinweis auf diesen Satz und auf die daraus folgende Regularität aller Punkte eines Kontinuums, dessen Punkte beinahe alle regulär sind, verdanke ich Herrn Nöbeling. Ursprünglich hatte ich nur gezeigt, daß ein Kontinuum, dessen Punkte beinahe alle regulär sind, eine stetige Kurve ist (was zum Beweise der Sätze in Nr. 3. 4. 1 und Nr. 3. 5 ausreicht). Und zwar bestand mein Beweis in einer Ausdehnung des von Herrn Wagner im Falle st. Sek. Unv. gegebenen Beweises auf den Fall regulärer Punkte.

[24]) Menger, a. a. O.[9]), S. 256.

[25]) Ist ein Kontinuum $\mathfrak{C}$ Bogensumme, so ist $\mathfrak{C}$ sogar darstellbar als Vereinigung abzählbar vieler einfacher Bogen, welche paarweise höchstens Endpunkte gemeinsam haben. Vgl. Chr. Pauc, Sur les sommes d'arcs, Revue Scientifique (Rose), Paris, 1940. S. auch Pauc, a. a. O.[27]), S. 87, Fußnote 10.

sind. Eine stetige Kurve ist dann und nur dann erbliche Bogensumme, wenn die Menge der nicht lokal zerlegenden Punkte von $\mathfrak{C}$ abzählbar ist[26]). Aus Nr. 3. 4. 1 und Nr. 3. 2. 1 folgt daher

Jedes (ebene) Kontinuum mit beinahe überall schw. Sek. Unv. ist erbliche Bogensumme.

Anmerkung. Ein Kontinuum $\mathfrak{C}$ ist jedenfalls dann erbliche Bogensumme, wenn das Kontingent von $\mathfrak{C}$ beinahe überall nicht-zusammenhängend ist[27]). Diese Bedingung ist für ebene Kontinua $\mathfrak{K}$ mit beinahe überall st. Sek. Unv. oder beinahe überall schw. Tgt. Unv. erfüllt; für schw. Tgt. Unv. ist dies eine Folge der Abzählbarkeit der Ecken (vgl. Nr. 3. 2. 1, Beweis), für st. Sek. Unv. eine Folge des ersten Differenzierbarkeitssatzes (Nr. 3. 6). Somit liefert für diese beiden Spezialfälle der Satz von Herrn Pauc[27]) ebenfalls einen Beweis für die Darstellbarkeit von $\mathfrak{K}$ als erbliche Bogensumme. Die Bedingung des Nicht-Zusammenhanges des Kontingents ist aber nicht für alle ebenen Kontinua mit schw. Sek. Unv. erfüllt; dies wird durch das Beispiel in Nr. 2. 5. 2 gezeigt.

3. 5. 1. Die in Nr. 3. 2; 3. 5 gewonnenen Ergebnisse liefern den

Satz. *Ein (ebenes) Kontinuum $\mathfrak{K}$ mit beinahe überall schwach unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen ist eine reguläre Kurve (im Sinne der topologischen Kurventheorie) sowie erbliche Bogensumme. Beinahe alle Punkte von $\mathfrak{K}$ sind überdies gewöhnliche Punkte.*

3. 6. Wir sagen, eine Menge $\mathfrak{M}$ besitze in einem ihrer Häufungspunkte H genau eine Tangente, wenn das Kontingent von $\mathfrak{M}$ in H genau zwei Halbtangenten enthält und wenn diese sich zu einer vollen Geraden ergänzen (komplementäre Halbtangenten).

Erster Differenzierbarkeitssatz. *Ein ebenes Kontinuum $\mathfrak{K}$ mit beinahe überall stark unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen besitzt beinahe überall genau eine Tangente.*

Beweis. (1) Da die st. Sek. Unv. Spezialfall der schw. Sek. Unv. ist, so genügt es gemäß Nr. 3. 3. 1, die gewöhnlichen Punkte Q von $\mathfrak{K}$ zu betrachten.

(2) In einem gewöhnlichen Punkte Q gibt es aber höchstens zwei verschiedene Halbtangenten an $\mathfrak{K}$.

Da nämlich ein gewöhnlicher Punkt zufolge seiner Definition die Eigenschaft besitzt, daß die Begrenzungen gewisser beliebig kleinen Umgebungen genau zwei Punkte mit $\mathfrak{K}$ gemeinsam haben, so folgt (2) aus der etwas schärferen Aussage

(2a) *Besitzt $\mathfrak{K}$ im Punkte P mindestens n verschiedene Halbtangenten ($n \geqq 1$), so enthält die Begrenzung jeder hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}$ von P mindestens n verschiedene Punkte von $\mathfrak{K}$, falls $\mathfrak{K}$ in P st. Sek. Unv. besitzt.*

In der Tat: Sind $\mathfrak{h}_j$, $j = 1, \ldots, n$; $n \geqq 1$, diese Halbtangenten, so folgt aus der vorausgesetzten st. Sek. Unv. die Existenz von n untereinander P-fremden, P-offenen Sektoren $\mathfrak{s}_j$, die sämtlich s-fremd sind zu $\mathfrak{K}$ und wobei $(\mathfrak{h}_j \mathfrak{s}_j, -(P))$ im Innern von $\mathfrak{s}_j$ liegt ($j = 1, \ldots, n$). Da $\mathfrak{h}_j$ Halbtangente an $\mathfrak{K}$ in P sein soll, so enthält $\mathfrak{s}_j$ eine gegen P konvergierende Folge von Punkten aus $\mathfrak{K}$, welche sämtlich von P verschieden sind. Daraus und aus Nr. 3. 1 folgt die Behauptung (2a).

Schließlich haben wir

(3) Besitzt $\mathfrak{K}$ in Q höchstens zwei Halbtangenten, so ist Q entweder eine Ecke

---

[26]) O. G. Harrold jr., Hereditary arc sums, Duke math. Journ. 5 (1939), S. 111, Nr. 1, (4).

[27]) Chr. Pauc, Les méthodes directes en calcul des variations et en géométrie différentielle, These (Paris, Hermann et Co., 1941), S. 87. Vgl. auch dazu Chr. Pauc, Unification des processus générateurs des divers contingents et paratingents, C. R. Acad. Sci. Paris 206 (1938), 1242—1244; ferner Topologie des contingents et paratingents, Rend. circolo Mat. Palermo 62 (1939), 137—238.

oder ein Punkt mit genau einer Tangente. Da die Ecken abzählbar sind[18]), ist damit alles bewiesen.

1. Zusatz. Aus der vorstehend bewiesenen Aussage (2a) folgt noch, daß *in jedem Endpunkte E von* $\mathfrak{K}$ *genau eine Halbtangente existiert, falls* $\mathfrak{K}$ *in E st. Sek. Unv. besitzt.*

2. Zusatz. Beim Beweis der Aussage (2a) wurde die Voraussetzung der *starken* Sek. Unv. voll ausgenutzt. Läßt man diese Voraussetzung fallen, so braucht der erste Differenzierbarkeitssatz nicht mehr zu gelten. Vgl. das Beispiel in Nr. 2. 5. 3. 2.

3. 7. Anmerkung. Der in Nr. 1. 4 erwähnte Differenzierbarkeitssatz besagt, daß jede ebene Punktmenge, deren Halbtangentenmengen fast überall schwach unvollständig sind, fast überall genau eine Tangente besitzt. „Fast überall" heißt hierbei soviel wie: „überall bis auf eine Punktmenge von der Länge Null". Dies folgt unmittelbar aus bekannten Sätzen[18]).

---

[18]) Vgl. F. Roger, Les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points, Acta math. 69 (1938), S. 99ff., sowie auch Haupt-Aumann, a. a. O.[6]), II. Bd., S. 108. — In meinem Manuskript war ursprünglich der obige Differenzierbarkeitssatz nur für Kontinua und nur für den Fall formuliert, daß die Halbtangentenmenge beinahe überall schwach unvollständig ist. Die Herren Pauc und Roger haben mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, daß der (von mir gegebene Beweis und damit der) Satz für beliebige Punktmengen und für fast überall schw. Tgt. Unv. gilt.

Eingegangen 18. Dezember 1941.

Über eine Mittelwertformel für Richtungsfunktionale im Vektorraum und einige Anwendungen

Von *H. Hadwiger* in Bern.

Ein System von endlich vielen Vektoren eines s-dimensionalen Vektorraumes, die alle in einem festen Punkt 0 angreifen, heißt Vektorstern. Wir betrachten in dieser Arbeit eine spezielle Klasse von skalaren Funktionen der Richtungen im Vektorraum, die solchen Vektorsternen zugeordnet werden. Repräsentant einer Raumrichtung ist ein von 0 ausgehender Einheitsvektor. Der einer bestimmten Raumrichtung zugewiesene Funktionswert ist ein Funktional des Vektorsternes, über das vorausgesetzt wird, daß es *additiv* und *drehinvariant* sei und einen bestimmten *Dilatationsgrad* aufweise. Das Funktional in Abhängigkeit von den Raumrichtungen kann in naheliegender Weise als Funktion auf der s-dimensionalen Einheitskugel gedeutet werden. Von dieser Funktion setzen wir voraus, daß sie im Riemannschen Sinn *eigentlich integrierbar* sei.

Der auf diese Weise eingeführte Begriff des Richtungsfunktionals ermöglicht eine allgemeine, einheitliche Durchführung von gewissen Untersuchungen, die sich auf Vektorpolygone, Vektorreihen, Linearformen und andere verwandte Gegenstände beziehen. Die Voraussetzungen haben wir so eng gewählt, daß es gelingt, eine allgemeine Aussage über den Wertevorrat des Funktionals zu machen, nämlich eine scharfe *Mittelwertformel* anzugeben. Es zeigt sich sodann, daß zahlreiche in der Literatur zerstreut liegende Ergebnisse als Spezialfälle in dem erwähnten Mittelwerttheorem enthalten sind. So ergeben sich unmittelbar zwei Theoreme von H. J. Hamilton[1]) über Reihen komplexer Zahlen, dazu ihre Verallgemeinerungen auf den s-dimensionalen Vektorraum. Ferner ergibt sich eine Erweiterung einer Formel von A. E. Mayer[2]) für die polygonale Streckbarkeit des s-dimensionalen Raumes. Weitere Theoreme werden als Beispiele für die Anwendbarkeit der allgemeinen Formel entwickelt.

Unter der oben angedeuteten Eigenschaft der Mittelwertformel, scharf zu sein, verstehen wir folgendes: Zu jedem Funktional der betrachteten Art gibt es Vektorsterne, für die der Wert des Funktionals in Abhängigkeit der Raumrichtungen fastkonstant ausfällt, d. h. sich von dem durch die Formel gelieferten Mittelwert um beliebig wenig unterscheidet. Der Mittelwert ist demnach die scharfe obere Schranke für den Minimalwert bzw. die scharfe untere Schranke für den Maximalwert des Funktionals.

---

[1]) H. J. Hamilton, A theorem on subsequences, Amer. math. Monthly 44 (1937), 586—587. H. J. Hamilton, Some theorems on subsequences, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 298-304.

[2]) A. E. Mayer, Größte Polygone mit gegebenen Seitenvektoren, Comment. math. helv. 10 (1938), 288-301. A. E. Mayer, Über den größten Durchmesser kovektorieller Polygone, Ergebnisse eines math. Kolloquiums (Wien) Heft 8 (1937), 37.

Der allgemein geführte Nachweis dieser Eigenschaft bildet den wesentlichen Teil der vorliegenden Note[3]). Zur Durchführung benötigen wir einen Hilfssatz über Riemannsche Integrale von Funktionen auf Kugelflächen, der eine in bezug auf die Gruppe der Kugeldrehungen gleichmäßige Approximierbarkeit des eigentlichen Integrals durch Darbouxsche Summen ausdrückt. Im 1-dimensionalen Fall, wo die auf der Peripherie des Einheitskreises definierte Funktion als 2π-periodische Funktion des Winkelargumentes geschrieben werden kann, kann diesem Hilfssatz die folgende Fassung gegeben werden:

Satz IIa. *Ist die periodische Funktion $\varphi(x) = \varphi(x + 2\pi)$ eigentlich integrierbar, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Auswahl von endlich vielen Argumenten $x_1, x_2, \ldots, x_N$ so, daß für alle α*

$$\left| \frac{\varphi(x_1 + \alpha) + \varphi(x_2 + \alpha) + \cdots + \varphi(x_N + \alpha)}{N} - M[\varphi] \right| < \varepsilon$$

ausfällt, wo

$$M[\varphi] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x)\, dx$$

den Mittelwert von $\varphi(x)$ bezeichnet.

Die durch diesen Satz zum Ausdruck gebrachte Translationsinvarianz der Approximation des Integralmittelwertes, die hier als Folge der Riemannschen Integrierbarkeit dargestellt werden soll, wird bei gewissen Definitionen abstrakter Integrierbarkeiten für Funktionen über Gruppen umgekehrt wesentlicher Bestandteil der Definition. Vgl. hierzu die von J. von Neumann[4]) in der Theorie der fast-periodischen Funktionen eingeführte „Mittelbarkeit" und ähnliche Begriffsbildungen bei W. Maak[5]).

Der in dieser Arbeit bewiesene Hilfssatz über Funktionen auf Kugelflächen kann als direkte Erweiterung des oben formulierten Hilfssatzes über Riemannsche Integrale periodischer Funktionen interpretiert werden.

1. Das Richtungsfunktional.

Es sei

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

ein Vektorstern $\mathfrak{S}_n$ des s-dimensionalen Vektorraumes. Die skalare Funktion

(2) $$\Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}$$

der Richtung e im Raume (e ist ein Einheitsvektor der Richtung und stellt die unabhängige Veränderliche dar) sei ein dem Vektorstern $\mathfrak{S}_n$ zugeordnetes Richtungsfunktional.

Wir setzen voraus:

Φ ist *additiv*, d. h. wenn sich $\mathfrak{S}_n$ in $\mathfrak{S}_p$ und $\mathfrak{S}_q$ zerlegen läßt, $n = p + q$, so gilt

(A) $$\Phi\{\mathfrak{S}_n, e\} = \Phi\{\mathfrak{S}_p, e\} + \Phi\{\mathfrak{S}_q, e\}.$$

Φ ist *drehinvariant*, d. h. wenn T eine Drehung des Vektorraumes um den Ursprung 0 bezeichnet, so gilt

---

[3]) Der Beweis der Schärfe der Schranke für ein spezielles konkret vorgegebenes Richtungsfunktional gelingt naturgemäß leichter. Vgl. das von A. E. Mayer angewandte Symmetrisierungsverfahren in der in [1]) zitierten ersten Arbeit, Seite 294-295.

[4]) J. von Neumann, Almost periodic functions in a group. I., Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 445—492.

[5]) W. Maak, Integralgeometrie 18 (Grundlagen der ebenen Integralgeometrie), Math. Abh. Hamburg **12** (1938), 88—110, bes. 87.

(B) $$\Phi\{T(\mathfrak{S}_n), T(e)\} = \Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}.$$

Φ hat den *Dilatationsgrad* $\alpha\ (\geqq 0)$, d. h. wenn $\lambda\mathfrak{S}_n$, $\lambda > 0$, den Vektorstern bezeichnet, der aus $\mathfrak{S}_n$ durch Multiplikation aller Vektoren mit λ hervorgeht, so gilt

(C) $$\Phi\{\lambda\mathfrak{S}_n, e\} = \lambda^\alpha \Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}.$$

Φ ist im Riemannschen Sinn *eigentlich integrierbar*, d. h. es existiert das über die s-dimensionale Einheitskugel K_s erstreckte Integral

(D) $$\int \Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}\, d\omega;$$

$d\omega$ bedeutet das Oberflächenelement von K_s an der Stelle, die durch den Einheitsvektor e bezeichnet ist.

2. Eine allgemeine Mittelwertformel.

Wir befassen uns im folgenden mit dem über K_s erstreckten Integralmittelwert

(3) $$M\{\mathfrak{S}_n\} = \frac{1}{\omega_s}\int \Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}\, d\omega,$$

(4) $$\omega_s = \frac{2(\sqrt{\pi})^s}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \text{Oberfläche von } K_s,$$

des Richtungsfunktionals Φ. Auf Grund der Voraussetzungen (A) bis (D) ergibt sich die Beziehung

(5) $$\frac{M\{\mathfrak{S}_n\}}{\sum_1^n |a_\nu|^\alpha} = \frac{1}{\omega_s}\int \Phi\{e_0, e\}\, d\omega.$$

Die rechte Seite von (5) ist ersichtlich nur vom Funktional Φ abhängig (e_0 ist ein fester Einheitsvektor); darin liegt die Bedeutung dieser Mittelwertformel für die Anwendungen, die darin besteht, eine für alle Vektorsterne gültige Aussage über den größten oder kleinsten Wert des Quotienten

(6) $$\frac{\Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}}{\sum_1^n |a_\nu|^\alpha}$$

zu machen. Die Verifikation von (5) ist sehr einfach. Mit Rücksicht auf (A) zerlegen wir zunächst

$$\Phi\{\mathfrak{S}_n, e\} = \sum_1^n \Phi\{a_\nu, e\}.$$

Wenn

$$e_\nu = \frac{a_\nu}{|a_\nu|}$$

gesetzt wird, ergibt sich weiter nach (C)

(7) $$\Phi\{\mathfrak{S}_n, e\} = \sum_1^n |a_\nu|^\alpha\, \Phi\{e_\nu, e\}.$$

Aus (B) folgt, daß das Integral über K_s

$$\int \Phi\{e_\nu, e\}\, d\omega$$

für alle $\nu = 1, 2, \ldots, n$ den gleichen Wert erhält; wenn e_0 einen beliebigen festen Einheitsvektor bezeichnet, schreiben wir dafür

(8) $$\int \Phi\{e_0, e\}\, d\omega,$$

ein Wert, der nur vom Funktional abhängt. Berechnen wir den Integralmittelwert (3) nach (7) mit Verwendung von (8), so ergibt sich nach kleiner Umformung die Mittel-

wertformel (5). Im Hinblick auf die Drehinvarianz (B) kann $\Phi\{e_0, e\}$ nur eine Funktion des Zwischenwinkels θ der beiden Einheitsvektoren sein. Wir setzen

$$\Phi\{e_0, e\} = \chi(\theta). \tag{9}$$

Für den Integralmittelwert über K_s

$$\frac{1}{\omega_s}\int \Phi\{e_0, e\} \tag{10}$$

ergibt sich nach geläufiger Umrechnung der Ausdruck

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}\int_0^{\pi} \chi(\theta)\sin^{s-2}\theta\,d\theta\,. \tag{11}$$

Wir geben nun der Mittelwertformel die folgende endgültige Gestalt:

Satz 1. *Ist $M\{\mathfrak{S}_n\}$ der Integralmittelwert* (3) *des Richtungsfunktionals $\Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}$, das den Voraussetzungen* (A), (B), (C), (D) *genügt, so gilt*

$$\frac{M\{\mathfrak{S}_n\}}{\sum_1^n |a_\nu|^s} = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}\int_0^{\pi} \chi(\theta)\sin^{s-2}\theta\,d\theta\,,$$

wo $\chi(\theta)$ durch (9) *definiert ist.*

3. Ein Hilfssatz über Riemannsche Integrale von Funktionen auf Kugelflächen.

Die Funktion φ sei auf der Kugelfläche K_s definiert, und dort im Riemannschen Sinn eigentlich integrierbar. $M[\varphi]$ sei der Integralmittelwert

$$M[\varphi] = \frac{1}{\omega_s}\int \varphi\,d\omega\,. \tag{12}$$

Die Funktion kann als Funktion über der Gruppe der Drehungen X der Kugelfläche K_s in sich dargestellt werden, indem man der Drehung X denjenigen Wert als Funktionswert $\varphi(X)$ zuordnet, den die ursprünglich gegebene Funktion φ in dem Punkte annimmt, der durch die Operation X aus einem beliebigen, aber fest gewählten Anfangspunkt hervorgeht. Die mit dieser Interpretation verbundene formale Darstellung ist der in dieser Note entwickelten Sachlage gut angepaßt und gestattet, den Hilfssatz bequem auszusprechen. Dieser lautet:

Satz II. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele Elemente $X_1, X_2, \ldots, X_N$, ausgewählt aus der Gruppe der Drehungen der Einheitskugel K_s in sich, so, daß für alle Drehungen A der Gruppe*

$$\left|\frac{\varphi(AX_1) + \varphi(AX_2) + \cdots + \varphi(AX_N)}{N} - M[\varphi]\right| < \varepsilon$$

gilt.

Die Gruppe ist hier multiplikativ geschrieben, im Gegensatz zu dem in der Einleitung angeführten 1-dimensionalen Spezialfall, wo die Gruppe der Kreisdrehungen als Additionsgruppe der reellen Zahlen mod 2π dargestellt ist.

Beweis. Es bezeichne Z_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) eine Zerlegung von K_s in 2^ν gleiche Zellen der Größe $\omega_s 2^{-\nu}$, die alle von einem Kugelkreis vom Radius ϱ_ν bedeckt werden können. Die Deckradien ϱ_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) sollen eine Nullfolge bilden. Z_0 bedeute die volle Kugelfläche, Z_ν entstehe aus $Z_{\nu-1}$ dadurch, daß alle $2^{\nu-1}$ Zellen von $Z_{\nu-1}$

halbiert werden. $Z_\nu(A)$ bezeichne die Zerlegung von K_ν, deren Zellen durch die Drehoperation A aus denjenigen von Z_ν hervorgehen; die Zahlen $M_{\nu k}(A)$ und $m_{\nu k}(A)$ sollen die obere und die untere Schranke der Funktion φ in der k-ten Zelle ($1 \leqq k \leqq 2^\nu$) der Zerlegung $Z_\nu(A)$ bedeuten. Wir setzen noch abkürzend $N = 2^\nu$. Für ein festes A der Drehgruppe werden im Hinblick auf die Voraussetzung über φ und auf die Konstruktion der Zerlegungsfolge Z_ν die Zahlenfolgen

$$\text{(a)} \qquad U_\nu(A) = \frac{\omega_s}{N} \sum_{k=1}^{N} M_{\nu k}(A) - \int \varphi \, d\omega$$

und

$$\text{(b)} \qquad V_\nu(A) = \int \varphi \, d\omega - \frac{\omega_s}{N} \sum_{k=1}^{N} m_{\nu k}(A)$$

nichtnegative monotone Nullfolgen. Wir setzen zunächst voraus, daß die Funktion φ stetig sei. Die Schranken $M_{\nu k}(A)$ und $m_{\nu k}(A)$ sind dann als Funktionen von A stetig. Die Stetigkeit der Funktion über der Drehgruppe wird auf Grund einer geeigneten Metrik definiert. Die Folgen (a) und (b) sind dann monotone Folgen nicht negativer, stetiger Funktionen über der kompakten A-Menge, die gegen die stetige Grenzfunktion Null konvergieren. Nach der beim Beweis des Satzes von Dini[6]) über die gleichmäßige Konvergenz monotoner Folgen stetiger Funktionen üblichen Schlußweise, gibt es zu einem $\varepsilon > 0$ ein μ so, daß für alle A der Gruppe

$$\text{(c)} \qquad U_\mu(A) < \varepsilon\omega_s \text{ und } V_\mu(A) < \varepsilon\omega_s$$

ausfällt. Wir wählen nun in jeder Zelle der Zerlegung Z_μ einen Punkt aus; $X_1, X_2, \ldots, X_N$ ($N = 2^\mu$) sollen die Drehungen bezeichnen, durch die die oben genannten Punkte aus dem fest gewählten Punkt der Kugel hervorgehen.

Die den Punkten der Zellen der Zerlegung $Z_\mu(A)$ zugordneten Drehungen sind dann $AX_1, AX_2, \ldots, AX_N$.

Wegen

$$m_{\mu k}(A) \leqq \varphi(AX_k) \leqq M_{\mu k}(A)$$

folgt aus (a), (b), (c),

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi(AX_k) - \frac{1}{\omega_s} \int \varphi \, d\omega \right| < \varepsilon$$

für alle A der Gruppe. Damit ist der Hilfssatz für stetige Funktionen bewiesen.

Es sei nun φ eine beliebige, aber eigentlich integrierbare Funktion. Bekanntlich gibt es zu einem $\varepsilon > 0$ stetige Funktionen φ_1 und φ_2, so daß

$$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$$

und

$$M[\varphi_2] - M[\varphi_1] < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Es gibt nun ein System von Drehungen

$$X_1, X_2, \ldots, X_N,$$

so daß für alle A der Drehgruppe simultan

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi_1(AX_k) - M[\varphi_1] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi_2(AX_k) - M[\varphi_2] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

---

[6]) Vgl. etwa: R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Berlin 1931, S. 89—90.

gilt. Mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$\varphi_1(AX) \leqq \varphi(AX) \leqq \varphi_2(AX),$$

$$M[\varphi] - M[\varphi_1] < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$M[\varphi_2] - M[\varphi] < \frac{\varepsilon}{2}$$

rechnet man aus, daß

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi(AX_k) - M[\varphi] \right| < \varepsilon$$

für alle A gilt. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

4. Fast-konstante Funktionale.

Wir können jetzt auf Grund des eben bewiesenen Hilfssatzes zeigen, daß es zu jedem Richtungsfunktional der von uns betrachteten Art Vektorsterne gibt, für die das Funktional fast konstant ist. Darunter verstehen wir folgendes:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann ein Vektorstern so gefunden werden, daß

$$\left| \frac{\Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}}{\sum_1^n |a_\nu|^s} - C \right| < \varepsilon \tag{13}$$

für alle Richtungen gilt. Die nur vom Funktional abhängige Konstante C hat den Wert

$$C = \frac{1}{\omega_s} \int \Phi\{e_0, e\}\, d\omega\,, \tag{14}$$

d. h. stellt den Integralmittelwert (10) dar, der auch durch (11) gegeben ist. Hieraus folgt:

Satz Ia. *Der Wert*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \chi(\theta) \sin^{s-2}\theta\, d\theta$$

ist die genaue untere Schranke des Maximums bzw. die genaue obere Schranke des Minimums von

$$\frac{\Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}}{\sum_1^n |a_\nu|^s}.$$

Ob es Vektorsterne gibt oder nicht gibt, für die ein gegebenes Richtungsfunktional exakt konstant ist, kann auf Grund der Voraussetzungen (A) bis (D) allein nicht entschieden werden. Wir werden durch Beispiele belegen, daß beide Möglichkeiten vorkommen.

Wir setzen

$$\varphi(X) = \Phi\{\mathfrak{S}_n, X^{-1}(e_0)\}\,,$$

nehmen also eine Funktion über der Drehgruppe von der im Hilfssatz des vorausgehenden Abschnittes betrachteten Art.

Es gibt dann zu $\varepsilon > 0$ eine Anzahl von endlich vielen Drehungen $X_1, X_2, \ldots, X_N$ so, daß

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Phi\{\mathfrak{S}_n, X_k^{-1} A^{-1}(e_0)\} - \frac{1}{\omega_s} \int \Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}\, d\omega < \varepsilon \sum_1^n |a_\nu|^s \right. \tag{a}$$

ausfällt für alle A. Nach der Voraussetzung (B) kann in dieser Relation

$$\Phi\{\mathfrak{S}_n, X_k^{-1}A^{-1}(e_0)\} = \Phi\{X_k(\mathfrak{S}_n), A^{-1}(e_0)\}$$

gesetzt werden. Bezeichnet $\mathfrak{S}_m^*$ den Vektorstern

$$\sum_{k=1}^{N} X_k(\mathfrak{S}_n),\ m = nN\,,$$

so ergibt sich jetzt aus (a) unter Berücksichtigung der Voraussetzung (A)

$$\text{(b)} \qquad \left|\frac{1}{N}\Phi\{\mathfrak{S}_m^*, A^{-1}(e_0)\} - \frac{1}{\omega_s}\int \Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}\, d\omega\right| < \varepsilon \sum_1^n |a_\nu|^s.$$

Offenbar ist

$$N\sum_1^n |a_\nu|^s = \sum_1^m |a_\nu^*|^s,$$

d. i. die Potenzsumme des Vektorsternes $\mathfrak{S}_m^*$, so daß aus (b)

$$\text{(c)} \qquad \left|\frac{\Phi\{\mathfrak{S}_m^*, e\}}{\sum_1^m |a_\nu^*|^s} - C\right| < \varepsilon$$

resultiert, wenn man berücksichtigt, daß zu jedem beliebigen e eine passende Drehung A so gewählt werden kann, daß $e = A^{-1}(e_0)$ ist. Ferner wurde noch die Mittelwertformel

$$\frac{1}{\omega_s}\int \Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}d\omega = \sum_1^n |a_\nu|^s C,\ C \text{ die Konstante (14)},$$

verwendet. Damit ist der Nachweis für (13) erbracht.

5. Verteilung von Raumrichtungen in Winkelräumen.

Die Gesamtheit der von Null ausgehenden Vektoren, die mit dem Einheitsvektor e einen Winkel bilden, der den Wert ϱ, $0 < \varrho \leqq \pi$ nicht überschreitet, nennen wir *Winkelraum*; wir bezeichnen ihn mit $W_\varrho(e)$.

Als erstes Beispiel betrachten wir folgendes Richtungsfunktional:

$\Phi\{\mathfrak{S}_n, e\}$ = Anzahl der zu $W_\varrho(e)$ gehörenden Vektoren des Vektorsternes $\mathfrak{S}_n$.

Φ ist offensichtlich ein Richtungsfunktional der von uns betrachteten Art vom Dilationsgrad $\alpha = 0$.

Die mit (9) eingeführte Hilfsfunktion ist

$$\chi(\theta) = \begin{cases} 1\ (0 \leqq \theta \leqq \varrho) \\ 0\ (\varrho < \theta). \end{cases}$$

Für den Integralmittelwert des Funktionals ergibt sich nach der Mittelwertformel

$$\text{(15)} \qquad M\{\mathfrak{S}_n\} = \frac{n\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}\int_0^\varrho \sin^{s-2}\theta\, d\theta\,.$$

Wir erwähnen folgende Folgerung:

Satz III. *Zu n von einem Punkt des s-dimensionalen Raumes ausgehenden Richtungen kann stets ein Winkelraum W_ϱ gefunden werden, der nicht weniger als*

$$n\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}\int_0^\varrho \sin^{s-2}\theta\, d\theta$$

Richtungen enthält.

6. Verallgemeinerung eines Theorems von H. J. Hamilton.

Als weiteres Beispiel wählen wir:

$$\Phi\{\mathfrak{S}_n, e\} = \sum_{W_\varrho} |a| ,$$

d. h. das Funktional Φ stellt die Summe der Beträge derjenigen Vektoren von $\mathfrak{S}_n$ dar, die im Winkelraum W_ϱ liegen.

Φ ist ein Richtungsfunktional vom Dilatationsgrad $\alpha = 1$. Der Integralmittelwert des Funktionals ist

$$M\{\mathfrak{S}_n\} = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \int_0^\varrho \sin^{s-2}\theta \, d\theta \right) \sum_1^n |a_\nu| . \tag{16}$$

Wir ziehen die Folgerung:

Satz IV. *Zu n von einem Punkt des s-dimensionalen Raumes ausgehenden Vektoren*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \quad \sum_1^n |a_\nu| = 1 ,$$

gibt es immer einen Winkelraum W_ϱ so, daß die Betragsumme $\sum_{W_\varrho} |a|$ der in ihm enthaltenen Vektoren nicht kleiner ist als

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \int_0^\varrho \sin^{s-2}\theta \, d\theta .$$

Dieser Satz läßt sich auch auf absolut konvergente Vektorreihen sinngemäß übertragen.

In dieser Fassung handelt es sich um eine Erweiterung eines von H. J. Hamilton[7]) im speziellen Fall $s = 2$ ausgesprochenen Theorems über absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen.

7. Erweiterung eines Theorems von A. E. Mayer.

Wir setzen

$$\Phi\{\mathfrak{S}_n, e\} = \sum_{W_\varrho} (a_\nu, e) ,$$

wo die Summation über alle Vektoren von $\mathfrak{S}_n$ erstreckt werden soll, die im Winkelraum $W_\varrho(e)$ liegen. Es handelt sich wieder um ein Richtungsfunktional vom Dilatationsgrad $\alpha = 1$. Hier gilt

$$\chi(\theta) = \begin{cases} \cos\theta & (0 \leqq \theta \leqq \varrho) \\ 0 & (\varrho < \theta). \end{cases}$$

Als Integralmittelwert ergibt sich

$$M\{\mathfrak{S}_n\} = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \sin^{s-1}\varrho \right) \sum_1^n |a_\nu| . \tag{17}$$

Berücksichtigt man, daß

---

[7]) Vgl. die unter [1]) zitierte erste Arbeit.

$$\left|\sum_{W_\varrho} a\right| \geqq \sum_{W_\varrho} (a, e)$$

ist, so folgert man:

Satz V. *Zu n von einem Punkt des s-dimensionalen Raumes ausgehenden Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\sum_1^n |a_\nu| = 1$, gibt es immer einen Winkelraum W_ϱ so, daß der Betrag $\left|\sum a\right|$ der Summe der in ihm enthaltenen Vektoren nicht kleiner ausfällt als*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \sin^{s-1}\varrho\,.$$

Besondere Beachtung verdient der Spezialfall $\varrho = \frac{\pi}{2}$. Der Winkelraum wird dann zu einem Halbraum, und das Richtungsfunktional wird stetig. Verstehen wir unter dem Durchmesser eines Vektorpolygons die größte Distanz zwischen irgend zwei Eckpunkten, so läßt sich der oben erwähnte Spezialfall der Aussage wie folgt formulieren:

Satz Va. *Die Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eines Vektorpolygons der Gesamtlänge $\sum_1^n |a_\nu| = 1$ lassen sich immer so umordnen, daß der Durchmesser des umgeordneten Polygons nicht kleiner ausfällt als*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}.$$

Dieser Satz stammt von A. E. Mayer[8]) während der Spezialfall $s = 2$ mit der unwesentlichen Erweiterung auf unendliche absolut konvergente Reihen durch H. J. Hamilton[9]) untersucht wurde.

8. Verallgemeinerte Trägheitsmomente.

Es sei $\alpha > 0$ und

$$\Phi\{\mathfrak{S}_n, e\} = \sum_1^n |(a_\nu, e)|^\alpha.$$

Φ ist ein Richtungsfunktional vom Dilatationsgrad α. In diesem Falle ist

$$\chi(\theta) = |\cos\theta|^\alpha,$$

und für den Integralmittelwert des Funktionals ergibt sich

$$M\{\mathfrak{S}_n\} = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+s}{2}\right)} \sum_1^n |a_\nu|^\alpha. \tag{18}$$

Wenn wir die Vektoren des $\mathfrak{S}_n$ als Ortsvektoren von n Massenpunkten auffassen, so lassen sich die Summen

$$A_\alpha = \sum_1^n |a_\nu|^\alpha$$

---

[8]) Vgl. die unter [2]) zitierten Arbeiten. Die Schranke heißt nach Menger *polygonale Streckbarkeit* des s-dimensionalen Raumes. Sie ist als Funktion von s logarithmisch konvex. Vgl. A. E. Mayer, Konvexe Lösung der Funktionalgleichung $1/f(x+1) = xf(x)$, Acta mathematica **70** (1938), 58—62.

[9]) Vgl. die unter [1]) zitierte zweite Arbeit.

und

$$B_\alpha = \sum_1^n |(a_\nu, e)|^\alpha$$

als verallgemeinerte Trägheitsmomente des Massenpunktsystems in bezug auf den Ursprung 0 und in bezug auf die zu e senkrecht stehende $(s-1)$-dimensionale Ebene interpretieren.

Der Mittelwertsbeziehung (18) können wir dann folgende Form geben:

Satz VI. *Ist A_α das polare und B_α das planare Trägheitsmoment vom Grade α eines Massenpunktssystems des s-dimensionalen Raumes in bezug auf den Punkt 0 und auf eine durch 0 hindurchgehende $(s-1)$-dimensionale Ebene, so ist der über alle Drehlagen der Ebene erstreckte Mittelwert des Quotienten B_α/A_α gleich*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+s}{2}\right)}.$$

Im Hinblick auf die mechanische Deutung ist der Fall $\alpha = 2$ besonders zu beachten. Der Mittelwert in Satz VI ist in diesem speziellen Fall $\frac{1}{s}$.

In einer früheren Arbeit[10]) hat Verf. gezeigt, daß es im s-dimensionalen Raum zu jedem $n \geqq s$ Büschel von n Geraden so gibt, daß die Quadratsumme der Kosinuswerte der n Winkel einer veränderlichen Geraden mit den n Büschelgeraden konstant und gleich $\frac{n}{s}$ wird.

Dies bedeutet auch daß es zu jedem $n \geqq s$ Vektorsterne bestehend aus n Einheitsvektoren gibt, für die das hier betrachtete Richtungsfunktional im Spezialfall $\alpha = 2$ konstant ausfällt. Die mechanische Interpretation lautet so:

Satz VIa. *Zu jedem $n \geqq s$ gibt es eine Verteilung von n Massenpunkten auf der Oberfläche der s-dimensionalen Einheitskugel so, daß alle planaren, also auch alle axialen Trägheitsmomente zweiten Grades bezogen auf $(s-1)$-dimensionale Ebenen durch den Kugelmittelpunkt bzw. Achsen durch den Kugelmittelpunkt gleich groß werden.*

9. Eine Abschätzung für das Produkt von Linearformen.

Es sei $|a_\nu| = 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Nach der Mittelwertsbeziehung (18) gibt es zu jedem $k = 1, 2, 3, \ldots$ einen Einheitsvektor e_k so, daß

$$\left\{\frac{\sum_{\nu=1}^n |(a_\nu, e_k)|^{\frac{1}{k}}}{n}\right\}^k \geqq \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+k}{2k}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1+ks}{2k}\right)}\right\}^k. \tag{19}$$

Für einen festen Einheitsvektor e strebt

$$\left\{\frac{\sum_{\nu=1}^n |(a_\nu, e)|^{\frac{1}{k}}}{n}\right\}^k \tag{20}$$

monoton gegen das geometrische Mittel[11])

---

[10]) H. Hadwiger, Über ausgezeichnete Vektorsterne und reguläre Polytope, Comment. math. helv. **13** (1940), 90—107.

[11]) Vgl. G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I, Berlin 1925. Aufgabe 82 auf Seite 54.

$$\left\{\prod_{\nu=1}^{n}|(a_\nu, e)|\right\}^{\frac{1}{n}}. \tag{21}$$

Mit Rücksicht darauf, daß die Ausdrücke (20) und (21) in Abhängigkeit von e stetige Funktionen auf der s-dimensionalen Einheitskugel sind, schließt man, daß die Konvergenz der Funktionenfolge (20) gegen die Grenzfunktion (21) gleichmäßig erfolgt. Man beachte außer der erwähnten Stetigkeit die Monotonie der Konvergenz und die Kompaktheit der Einheitskugel und wende den Satz von Dini[12]) an.

Es sei e_0 ein Häufungsvektor der Folge e_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Aus der eben erwähnten gleichmäßigen Konvergenz folgt, daß

$$\left\{\prod_{\nu=1}^{n}|(a_\nu, e_0)|\right\}^{\frac{1}{n}} \geqq \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+k}{2k}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1+ks}{2k}\right)}\right\}^k \tag{22}$$

sein muß.

Für den Logarithmus des Grenzwertes auf der rechten Seite von (22) erhält man

$$-\log 2 + \frac{1}{s} - \sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{s}{2\lambda(2\lambda+s)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\right\}. \tag{23}$$

Wir betrachten nun n Linearformen

$$L_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{s} a_{\nu\mu}x_\mu,\quad \nu = 1, 2, \ldots, n,\quad \sum_{\mu=1}^{s} a_{\nu\mu}^2 = 1, \tag{24}$$

in den s Variablen x_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, s)$, und beschränken uns auf Punkte der s-dimensionalen Einheitskugel

$$\sum_{\mu=1}^{s} x_\mu^2 = 1. \tag{25}$$

In diesem Fall kann

$$L_\nu(x) = (a_\nu, e) \tag{26}$$

gesetzt werden, wo e den Einheitsvektor $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ bezeichnet.

Nach (22) und (23) gibt es auf der Einheitskugel immer einen Punkt x so, daß

$$|L_1(x)L_2(x)\cdots L_n(x)|^{\frac{1}{n}} \geqq \frac{1}{2}e^{\frac{1}{s}-\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{s}{2\lambda(2\lambda+s)}} \tag{27}$$

ausfällt. Wir fassen das erreichte Ergebnis wie folgt zusammen:[13])

Satz VII. *Das Maximum des geometrischen Mittels*

---

[12]) Vgl. Fußnote [6]).

[13]) Die angegebene Zahl ist vermutlich die exakte untere Schranke der Maxima der geometrischen Mittel der betrachteten Linearformen auf der Einheitskugel. Dies folgt jedoch nicht ohne zusätzliche Untersuchungen aus der Schärfe der Schranke in Satz Ia, da das dem Satz VIII zugrunde liegende Richtungsfunktional (21) durch Grenzübergang aus additiven Funktionalen hervorgeht, ohne selbst ein solches zu sein. Daß das geometrische Mittel nie fast-konstant sein kann, ergibt sich schon daraus, daß es stets den Wert Null annimmt. Es ist aber klar, daß die Schranke bei fest gegebenem n verbessert werden kann. So ist z. B. $\varrho(2) = \frac{1}{2}$. Ist aber $n = 2$, so kann die Schranke durch $\varrho = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ersetzt werden. Das Maximum von

$$\sqrt{|(ax+by)(cx+dy)|},\quad a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1$$

auf dem Kreise $x^2+y^2=1$ ist $\sqrt{\frac{1+|\Delta|}{2}}$, $\Delta = ac+bd \leqq 1$, also jedenfalls nicht kleiner als $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$|L_1(x)L_2(x)\cdots L_n(x)|^{\frac{1}{n}}$$

der n Linearformen

$$L_\nu(x)=\sum_{\mu=1}^{s} a_{\nu\mu}x_\mu,\quad \sum_{\mu=1}^{s} a_{\nu\mu}^2=1,\quad \nu=1,2,\ldots,n,$$

der s Variablen x_μ, $\mu=1,2,\ldots,s$ *auf der Einheitskugel* $\sum_{\mu=1}^{s} x_\mu^2=1$ *ist nicht kleiner als*

$$\varrho(s)=\frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{s}-\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{s}{2\lambda(2\lambda+s)}}$$

Für die Schranken $\varrho(s)$ erhält man

$$\varrho(1)=1,\ \varrho(2)=\frac{1}{2},\ \varrho(3)=\frac{1}{e}.$$

Allgemein ist für $s>2$

$$\varrho(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}\,e^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{s-2}\right)} & (s=\text{gerade})\\ e^{-\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{s-2}\right)} & (s=\text{ungerade}).\end{cases}\tag{28}$$

Eingegangen 12. Februar 1942.